60 de ani

Colegiul Național „Vasile Lucaciu”

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

Fie $a_1, a_2, ..., a_{2022}$ o scriere arbitrară a numerelor 1, 2, 3, …, 2022. Arătați că printre numerele $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, ..., |a_{2022} - 2022|$ există cel puțin două numere egale.

Subiectul 2.

a) Arătați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}\right).$$

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2023}-1\right) + \sqrt{1011}.$$

Subiectul 3.

a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $(x+y)^2 \le 2\left(x^2+y^2\right)$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 75$. Determinați cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $x+y$.

Subiectul 4.

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, $VA \ne AB$ și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Dacă punctele M, N, P, Q sunt proiecțiile vârfului V al piramidei pe bisectoarele unghiurilor VAB, VCB, VAD, respectiv VCD, arătați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

b) Fie R mijlocul lui $[VO]$, S mijlocul lui $[BR]$, iar $T \in [AO]$ astfel încât $AT = 3 \cdot TO$. Arătați că $TS \parallel (VCD)$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro