Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a X-a

Subiectul 1. Pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, elementele mulțimii M_a sunt punctele din plan cu afixele corespunzătoare rădăcinilor complexe ale ecuației

$$\frac{z}{1+2i} = \frac{a^2}{z-2ai}.$$

Arătați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, cu $a \neq b$, punctele din mulțimea $M_a \cup M_b$ determină o pereche de drepte paralele.

Subiectul 2. Fie $n \geq 3$ și $a_1, a_2, ..., a_{n^3} \in \mathbb{N}^*$, pentru care $\sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{\sqrt[3]{a_k^2}} \geq 3n$.

Arătați că cel puțin două dintre cele n^3 numere, $a_1, a_2, ..., a_{n^3}$, sunt egale.

Subiectul 3. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n \in [0,1]$. Arătați că

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n (a_1 + a_2 + ... + a_n)} + \sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2) \cdot ... \cdot (1-a_n)(n-(a_1+a_2+...+a_n))} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Subiectul 4. Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Arătați că există funcții bijective $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $a^2 \cdot f^2\left[\left(a^2+1\right)x\right] - 2af\left(x^4+a^2\right) + 1 \leq 0$, pentru orice x număr real, dacă și numai dacă $a \in \{-1,1\}$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro