Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a XI-a

Subiectul 1.
Demonstrați că dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $A^2=I_n$ dacă și numai dacă există două matrice $B, C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot B=B$, $A\cdot C=-C$ și $B+C=I_n$.

Subiectul 2.
Considerăm matricele $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $A+B=I_n$ și $A^2=A^3$. Arătați că:

a) $(I_n-AB)^m=I_n-mAB,\ \forall m\in\mathbb{N}^*$;

b) funcția $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(X)=X+AB(I_n-X)$ este inversabilă.

Subiectul 3.
Fie $(a_n)_{n\geq1}$ un șir definit prin $a_1>0$ și $a_{n+1}=\dfrac{n\cdot a_n}{n+a_n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ are limită și calculați această limită.

Subiectul 4.
Șirul $(x_n)_{n\geq1}$ satisface relația de recurență $x_{n+1}=a\cdot x_n+\sqrt{b\cdot x_n^2-2}$, $n\geq1$, $x_1>0$, unde a și b sunt numere naturale nenule, cu $b\cdot x_1^2-2>0$. Demonstrați că:

a) dacă $a=2, b=3$ și $x_1=1$, atunci $x_n\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) mulțimea $A=\left\{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ \middle|\ \exists n\in\mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x_n\notin\mathbb{Q}^*, \forall x_1\in\mathbb{N}^*\right\}$ este infinită.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro