

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Determinați funcțiile derivabile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că funcția $f + 3g$ este o primitivă a funcției $2f - g$, iar funcția $5f - 6g$ este o primitivă a funcției $10f + 2g$.

Subiectul 2. Determinați funcțiile derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$f'(x\sqrt{x^2+1}) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Subiectul 3. Fie o mulțime S cu cel puțin două elemente și o lege de compoziție asociativă „ \circ ” pe S , cu proprietățile:

(1) $\forall x, y \in S, xy^3 = yx^3$

(2) $\forall x, y \in S, x^2y = y^2x$

(3) $\forall x \in S, x^4 = x$.

a) Demonstrați că (S, \cdot) nu poate fi grup.

b) Demonstrați că legea de compoziție „ \circ ” este comutativă pe S .

c) Dați exemplu de mulțime S cu proprietățile din enunț.

Subiectul 4. Se consideră legea de compoziție asociativă $\circ: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$, există $y \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $x \circ y \neq y \circ x$.

Determinați funcțiile $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \text{ cu } x \neq y, f(x \circ y) = \frac{x+y}{x-y} \cdot (f(x) - f(y)).$$

Gazeta Matematică

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!