Ministerul Educației

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2023

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a V-a

Problema 1. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, știind că numerele $\overline{ab}, \overline{cb}$ și d sunt prime, iar $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 + d^2 = 2022$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Un magazin a vândut 235 de roboți în cele 12 luni ale unui an. În fiecare lună au fost vânduți fie câte 16, fie câte 20, fie câte 25 de roboți. Determinați numărul de luni în care au fost vânduți exact 20 de roboți.

Problema 3. Spunem că 13 numere naturale nenule formează un grup *deosebit* dacă numerele grupului sunt consecutive. Determinați:

a) câte grupuri deosebite au suma numerelor egală cu un pătrat perfect de trei cifre;

b) numărul maxim de numere prime aflate într-un grup deosebit.

Problema 4. Se scriu pe tablă, unul după altul, toate numerele naturale de la 1 la 30000, formând o secvență lungă de cifre:

$$123456789101112\ldots30000.$$

De câte ori apare 2023 în această secvență?

Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VI-a

Problema 1. Elementele unei mulțimi A sunt 13 numere naturale consecutive, elementele unei mulțimi B sunt 12 numere naturale consecutive, iar elementele mulțimii $A \cup B$ sunt 15 numere naturale consecutive.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii $A \setminus B$.

b) Dacă, în plus, suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B, determinați cele două mulțimi.

Gazeta Matematică

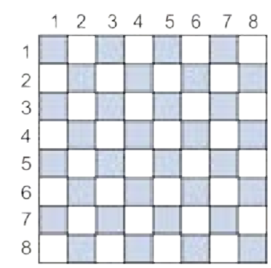
Problema 2. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$ și $\sphericalangle ABC = 72°$. Pe dreapta BC considerăm punctul D astfel încât C să aparțină segmentului BD și $CD = AB$.

a) Arătați că AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$.

b) Pe paralela la AB dusă prin D luăm punctul E, în același semiplan cu A față de BD, astfel încât $DE = DB$. Fie F punctul de intersecție a dreptelor AD și BE. Demonstrați că dreptele AC și AE sunt perpendiculare și $AF = FC = BC$.

Problema 3. Considerăm tabloul din figura alăturată. În fiecare pătrățel al lui scriem câte un număr întreg, astfel încât suma numerelor scrise în pătrățelele albe să fie 23, iar suma numerelor scrise în pătrățelele de pe coloanele cu număr impar să fie 40. Înlocuim apoi numerele din pătrățelele albe cu opusele lor.

Cât este acum suma numerelor din pătrățelele de pe liniile cu număr impar?



Problema 4. Determinați numerele naturale n pentru care cel mai mare divizor prim al numărului $n^2 + 2$ este egal cu cel mai mare divizor prim al numărului $n^2 + 2n + 3$.

Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați toate perechile (x, y) de numere reale care verifică relația

$$3 \cdot \left\{\frac{3x+2}{3}\right\} + 4 \cdot \left[\frac{4y+3}{4}\right] = 4 \cdot \left\{\frac{4y+3}{4}\right\} + 3 \cdot \left[\frac{3x+2}{3}\right] = 18.$$

Notațiile $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinați numerele întregi a, b, c, d care îndeplinesc simultan condițiile $a+b+c=2d$ și $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=d^2$.

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$ și se notează cu M mijlocul laturii CD. Perpendiculara din C pe BM intersectează dreptele BM și AB în punctele N, respectiv E. Dreapta BM intersectează dreapta AD în P, iar mijlocul segmentului BN se notează cu F. Arătați că:

a) triunghiurile CBE și BAP sunt congruente;

b) segmentele AN și DF sunt congruente și perpendiculare.

Problema 4. Fie triunghiul ABC care are $\sphericalangle ABC = 90°$ și $\sphericalangle BCA = 30°$. Fie AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$, și $BE \perp AC$, $E \in AC$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE, iar cu P mijlocul lui CM. Arătați că $AC = 4 \cdot DP$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie $SABCD$ o piramidă având ca bază paralelogramul $ABCD$. Pe muchiile SA, SB, SC și SD se consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $MNPQ$ să fie un paralelogram.

a) Dacă $ABCD$ este un romb, arătați că $MNPQ$ este un romb.

b) Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, arătați că $MNPQ$ este un dreptunghi.

Gazeta Matematică

Problema 2. Un triplet (a, b, c) de numere întregi se numește *artistic* dacă numărul $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ este întreg.

a) Determinați numerele întregi n pentru care tripletele $(n, n+1, n+3)$ sunt artistice.

b) Dacă (x, y, z) este un triplet artistic, arătați că numărul $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ este întreg.

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică simultan condițiile:

(i) $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+2023^2\right)=(ab+2023c)^2$;

(ii) $\left(a^2+2023^2\right)\left(b^2+c^2\right)=(2023a+bc)^2$;

(iii) cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c și 2023 este egal cu 1.

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=180^\circ$, $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DAB}$, iar proiecția vârfului D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC. Demonstrați că $AB=AC$ și $DB=DC$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie triunghiul ABC.

a) Arătați că bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C se intersectează într-un punct I_A.

b) Notăm cu M, N și P proiecțiile punctului I_A pe dreptele AC, BC respectiv AB. Arătați că, dacă $\overrightarrow{I_AM} + \overrightarrow{I_AP} = \overrightarrow{I_AN}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x]^2 - x = -0,99.$$

b) Arătați că, pentru orice $a \leq -1$, ecuația $[x]^2 - x = a$ **nu** are soluții reale.

Problema 3. Dacă x, y, z sunt numere pozitive cu $x + y + z = 1$, arătați că:

a)

$$1 - \frac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \frac{(1-y)(1-z)}{x^2 + x};$$

b)

$$\frac{x^2 - yz}{x^2 + x} + \frac{y^2 - zx}{y^2 + y} + \frac{z^2 - xy}{z^2 + z} \leq 0.$$

Problema 4. Determinați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea:

numărul $f(x) \cdot f(y)$ divide numărul $(1 + 2x) \cdot f(y) + (1 + 2y) \cdot f(x)$,

pentru orice numere naturale x și y.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a X-a

Problema 1. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3.$$

Supliment Gazeta Matematică

Problema 2. Pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC se consideră punctul N astfel încât măsura arcului NB este 30°. Din punctul N se duc perpendiculare pe latura AC, respectiv AB. Acestea intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, respectiv I.

a) Demonstrați că triunghiul IMN este echilateral.

b) Dacă H_1, H_2 și H_3 reprezintă ortocentrele triunghiurilor NAB, IBC, respectiv CAM, demonstrați că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați toate numerele $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$\left|z^{n+1} - z^n\right| \geq \left|z^{n+1} - 1\right| + \left|z^{n+1} - z\right|.$$

Problema 4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(f(x^2)) + y,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2023

CLASA a XI-a

Problema 1. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(1) = e$ şi $f(x+y) = e^{3xy} \cdot f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel ca matricea $A + B^{-1}$ să fie inversabilă, cu $\left(A + B^{-1}\right)^{-1} = A^{-1} + B$. Arătaţi că $\det(AB) = 1$. Rămâne adevărată concluzia în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Presupunem că $f : [a, b] \to [a, b]$ este o funcţie continuă, cu proprietatea că există $c, d \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = a$ şi $f(d) = b$. Arătaţi că funcţia $f \circ f : [a, b] \to [a, b]$ are cel puţin trei puncte fixe. ($x_0 \in D$ se numeşte punct fix al funcţiei $\varphi : D \to D$ dacă $\varphi(x_0) = x_0$.)

Problema 4. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 = B^2 = O_3$. Demonstraţi că $AB = BA$ implică $AB = O_3$. Arătaţi că implicaţia reciprocă este falsă.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \operatorname{tg}(x) + 2 \cdot f'(x) \geq 1\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Arătați că

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx \geq \pi - 2\,.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H și K două subgrupuri proprii ale lui G, cu proprietatea că $H \cap K = \{e\}$ și că $(G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$ este parte stabilă în raport cu operația din G. Arătați că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$.

Problema 3. Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.
a) Arătați că

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

b) Dacă $f(0) = 0$ și f este derivabilă la dreapta în 0, arătați că limitele

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad \text{și} \qquad \lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx\right)$$

există, sunt finite și egale.

Problema 4. Pe mulțimea $A = [0, \infty)$ a numerelor reale nenegative se consideră trei funcții $f, g, h : A \longrightarrow A$ și operația binară $* : A \times A \longrightarrow A$, definită prin

$$x * y = f(x) + g(y) + h(x) \cdot |x - y|\,, \qquad \text{pentru orice } x, y \geq 0.$$

Dacă $(A, *)$ este un monoid comutativ,
a) arătați că funcția h este continuă pe A;
b) determinați funcțiile f, g, h.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.