CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVII-A
06.05.2023
Clasa a V-a
BAREM

Problema 1. Fie șirul de fracții

$$\frac{11}{18}, \frac{12}{27}, \frac{13}{36}, \frac{14}{45}, \frac{15}{54}, \dots$$

a) Ordonați crescător numere raționale p, q, r, unde p și q sunt primele două fracții, iar r este cea de a 2023-a fracție din șirul de mai sus.

b) Dacă S este suma primelor o sută de fracții din șirul de mai sus, arătați că

$$11 < 0{,}909 \cdot S.$$

Vasile Giurgi

Soluție

a)

Cum $p = \frac{11}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$, $q = \frac{12}{27} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$ și $r = \frac{1}{9} + \frac{1}{2023}$, rezultă

$$r < q < p$$ **(3p)**

b) Avem

$$S = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{101}\right) = \frac{100}{9} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{101}\right)$$

(1p)

Cum

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{101} > 100 \cdot \frac{1}{101}$$

(1p)

se obține

$$S > \frac{100}{9} + \frac{100}{101} = \frac{11000}{909} = 11 \cdot \frac{10^3}{909}$$

(1p)

deci

$$11 < 0{,}909 \cdot S.$$ **(1p)**

Problema 2. a) Arătați că nu există numerele naturale x și y pentru care

$$x^3 + x^2 + 4^y = 2023.$$

b) Determinați numerele naturale x și y pentru care

$$x^3 + 4^y = 2024.$$

Supliment, Gazeta Matematică 11/2022

Soluție

a)

Cum $x^3 + x^2 = x \cdot x \cdot (x+1)$ este număr par și 2023 este număr impar,
rezultă că 4^y este impar, deci $y = 0$ .... **(1p)**

Pentru ecuația $x^3 + x^2 = 2022$
dacă $x = 2k$ este număr par, atunci
$x^3 + x^2 = x^2 \cdot (x + 1) \vdots 4$, dar $4 \mid 2022$, deci nu sunt soluții . . . . **(1p)**
dacă $x = 2k + 1$ este număr impar, atunci $x^3 + x^2 = 2 \cdot (k + 1) \cdot (2k + 1)^2 = 2022$
implică $(k + 1) \cdot (2k + 1)^2 = 1011$. Cum $1011 = 3 \cdot 337$ nu conține pătrate perfecte în descompunerea sa, ecuația nu are soluții. . . . . **(1p)**

b)
Pentru $y = 0$, se obține $x^3 = 2023$, fără soluții.
Pentru $y = 1$, se obține $x^3 = 2020$, fără soluții. . . . . **(1p)**
Pentru $y \geq 2$, cum 4^y este număr par, rezultă x^3 trebuie să fie par, deci, pentru $x = 2k$, se obține $8k^3 + 4^y = 2024$, de unde rezultă $k^3 + 2^{2y-3} = 253$ . . . . **(1p)**
Deci $k^3 = 253 - 2^{2y-3} \leq 251$, adică $k \leq 6$ și k număr impar. . . . . **(1p)**
Verifică și se obține $k = 5$, deci $x = 10$ și $y = 5$ . . . . **(1p)**

Problema 3. a) Determinați a șaptea zecimală a numărului

$$z = 1 - \frac{1}{7}.$$

b) Fie a, b, c, d, e și f șase numere naturale care prin împărțirea la 7 dau resturi nenule distincte și

$$N = \frac{a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6}{7}$$

Arătați că pentru orice alegere a numerelor a, b, c, d, e și f, suma primelor șase zecimale ale numărului N este un cub perfect.

Andrei Horvat-Marc

Soluție

a) $z = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = 0,(857142)$, deci cea de a 7-a zecimală este 8 . . . . **(3p)**
b) Numerele a, b, c, d, e și f pot avea una din formele $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$ sau $7k + 6$, cu $k \in \mathbb{N}$.
Pentru un număr de forma $7k + 1$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 1)^6 = 7K + 1$
Pentru un număr de forma $7k + 2$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 2)^6 = 7K + 1$
Pentru un număr de forma $7k + 3$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 3)^6 = 7K + 1$
Pentru un număr de forma $7k + 4$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 4)^6 = 7K + 1$
Pentru un număr de forma $7k + 5$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 5)^6 = 7K + 1$
Pentru un număr de forma $7k + 6$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 6)^6 = 7K + 1$
. . . . **(2p)**
Deci pentru suma $S = a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6$ există $M \in \mathbb{N}$ astfel încât $S = 7M + 6$
atunci $N = M + \frac{6}{7} = M + 0,(857142)$ . . . . **(1p)**
suma primelor șase zecimale este $27 = 3^3$ un cub perfect. . . . . **(1p)**