# CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA"
## EDIȚIA A XXVII-A
## 06.05.2023

## Clasa a XI-a

**Subiectul 1. a)** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $Tr(A) = 0$ dacă și numai dacă

$$\det(A - I_2) = \det(A + I_2).$$

**b)** Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A^k - I_2) = \det(A^k + I_2)$ pentru $k \in \{2022, 2023\}$.
Demonstrați că $A^2 = O_2$.

**Subiectul 2.** Fie $x_1, y_1 \in (0, \infty)$ și șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin relațiile de recurență

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot y_n + x_{n+1} \cdot y_n + \cdots + x_{2n} \cdot y_n}{x_n \cdot y_n + x_n \cdot y_{n+1} + \cdots + x_n \cdot y_{2n}}.$$

**Subiectul 3.** Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n > 0$ și $a_n > 0$ pentru orice $n \geq 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Dacă cele două șiruri verifică egalitatea

$$e^{x_n} + \sin x_n = 1 + a_n \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_n}.$$

*Toate subiectele sunt obligatorii*
*Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte*
*Timp de lucru 120 de minute*