



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVII-A
06.05.2023

Clasa a XII-a

Subiectul 1. Fie G un grup cu $10n + 1$ elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ și H o submulțime cu proprietatea că $x^{-2} \cdot y^5 \in H$ pentru orice $x, y \in H$. Arătați că dacă $x^{-2} \cdot y^5 = y^5 \cdot x^{-2}$ pentru orice $x, y \in H$, atunci $x \cdot y = y \cdot x$ pentru orice $x, y \in H$.

Subiectul 2. Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă și $a \in (0,1)$. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cdot f(0)}{\ln a} + n^2 \int_0^1 a^{nx} f(x) dx \right),$$

unde $f'(0) = 1$.

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, și funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și monotonă. Arătați că funcția $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$F(x) = x \cdot \int_a^b f(t) dt - a \cdot \int_x^b f(t) dt - b \cdot \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

are semn constant pe $[a, b]$.

*Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru 120 de minute*