CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIŢIA A XXVII-A
06.05.2023
Clasa a VI-a
BAREM

Subiectul 1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele raționale nenule a, b, c pentru care

$$\frac{na+b}{a+(n+1)b} = \frac{nb+c}{b+(n+1)c} = \frac{nc+a}{c+(n+1)a}.$$

Arătați că $a = b = c$.

Andrei Horvat-Marc

Soluție Se obține

$$\frac{na+b}{a+(n+1)b} = \frac{nb+c}{b+(n+1)c} = \frac{nc+a}{c+(n+1)a} = \frac{n+1}{n+2}$$

.... **(3p)**

Din $\frac{na+b}{a+(n+1)b} = \frac{n+1}{n+2}$ se obține $a(n^2+n-1) = b(n^2+n-1)$ ....**(2p)**

Din $\frac{nb+c}{b+(n+1)c} = \frac{n+1}{n+2}$ se obține $b(n^2+n-1) = c(n^2+n-1)$ ....**(1p)**

Finalizare $a = b = c$ .... **(1p)**

Subiectul 2. Fie șirul de numere raționale: $2, -4, -2, \frac{1}{2}, \ldots$ (al treilea termen este câtul dintre al doilea și primul termen, al patrulea termen este câtul dintre al treilea și al doilea termen, și așa mai departe).

a) Scrieți încă cinci termeni ai șirului;

b) Aflați al 2023-lea termen al șirului;

c) Calculați suma și produsul primilor 100 de termeni ai șirului.

Pop Ovidiu

Soluție

a) Conform regulii de formare a șirului avem:

$t_1 = 2$, $t_2 = -4$, $t_3 = -2$, $t_4 = \frac{1}{2}$,

$t_5 = -\frac{1}{4}$, $t_6 = -\frac{1}{2}$, $t_7 = 2$, $t_8 = -4$, $t_9 = -2$... **(2p)**

b) Observăm că $t_1 = t_7$, $t_2 = t_8$, ..., $t_k = t_{k+6}$, $k \in \mathbb{N}^{\cdot}$, adică termenii se repetă din 6 în 6....................**(1p)**

Cum $2023 = 6 \cdot 372 + 1 \Rightarrow t_{2023} = t_1 = 2$..**(1p)**

c)

$$S = t_1 + t_2 + \cdots + t_{100} = (t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6) \cdot 16 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{143}{2}$$

......................**(2p)**

$$P = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{100} = (t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6)^{16} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 = 8$$

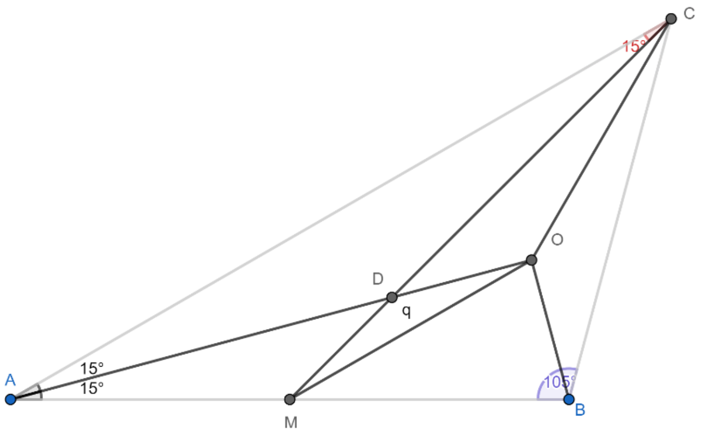
....**(1p)**

Subiectul 3. Se consideră triunghiul ABC cu $\measuredangle A = 30°$ și $\measuredangle B = 105°$. Notăm cu M mijlocul laturii AB. Bisectoarea unghiului BCM intersectează bisectoarea unghiului BAC în punctul O. Știind că $\measuredangle ACM = 15°$ arătați că:

a) $2 \cdot CO = AB$.

b) Dreptele BO și OA sunt perpendiculare.

Gazeta Matematică 2/2023(prelucrare)



Soluție.

a) (3p)

$$AO \cap CM = \{D\}$$

ΔADC – triunghi isoscel, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 15°$,
deci $[AD] \equiv [CD]$

din $\Delta ADM \equiv \Delta CDO$ rezultă $[AM] \equiv [CO]$

cum M este mijlocul segmentului $[AB]$, se obține

$$2 \cdot CO = AB$$

b) (4p)

De la subpunctul a) $\Delta ADM \equiv \Delta CDO$ rezultă $[DM] \equiv [DO]$ Atunci ΔDMO isoscel.

$\sphericalangle AMC = 180° - 30° - 15° = 135°$, iar $\sphericalangle ADM = 180° - 15° - 135° = 30°$, de unde rezultă că $\sphericalangle MDO = 150°$, iar cum ΔMDO isoscel avem $\sphericalangle DMO = \sphericalangle DOM = 15°$.

Dar $\sphericalangle BMC = 45°$ ceea ce duce la $\sphericalangle BMO = 30°$ (*).

Iar $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle MOA = 15°$ ceea ce înseamnă că ΔAOM isoscel, $[AM] \equiv [OM]$.

Acum $[BM] \equiv [OM]$ și ΔBOM isoscel cu $\sphericalangle BOM \equiv \sphericalangle MBO$ (**)

Din (*) și (**) aflăm că $\sphericalangle BOM = 75°$, iar pentru că $\sphericalangle AOM = 15°$ obținem concluzia $\sphericalangle AOB = 90°$ de unde Dreptele BO și OA sunt perpendiculare.

Subiectele au fost selectate de către
Prof. Pop Ovidiu