COLEGIUL NAŢIONAL
„DRAGOŞ VODĂ”
SIGHETU MARMAŢIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE DIN
ROMÂNIA

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIŢIA A XXVII-A
06.05.2023
Clasa a VII-a
BAREM

Subiectul 1. Fie a, b, c numere raționale pozitive astfel încât

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}.$$

a) Arătați că

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}}\in\mathbb{Q};$$

b) Arătați că

$$\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Soluție

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{a}{b+c}=\frac{1}{2};\ \frac{b}{a+c}=\frac{1}{2};\ \frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}$$

.........(2p)

Atunci $2a=b+c$ și $2b=a+c$. Scăzând cele două relații obținem $2(a-b)=b-a\Rightarrow$ $2(a-b)-b+a=0$,
adică

$2(a-b)+(a-b)=0$ și $(a-b)(2+1)=0\ \Rightarrow\ a-b=0\ \Rightarrow\ a=b$**..........(2p)**

Analog $b=c\ \Rightarrow\ a=b=c\ \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c}+\frac{b+c}{b+2c+3a}+\frac{c+a}{c+2a+3b}}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=1\in\ \mathbb{Q};$$

…...........................(1p)

a) Conform subpunctului a) $a=b=c\ \Rightarrow$

$\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)}+\frac{bc}{a(2b-c)}+\frac{ca}{b(2c-a)}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\in\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$**..(2p)**

Subiectul 2. a) Arătați că pentru orice numere reale $x,y\in\mathbb{R}$, are loc egalitatea

$$(x+y-2)(2x-y-1)+y^2+5x-2x^2-xy-y=2.$$

b) Determinați numerele întregi $x, y \in \mathbb{Z}$, pentru care $1 + x < 2y < -2(x + 13)$ și

$$2x^2 + xy + y - 5x - y^2 = 2023.$$

Andrei Horvat-Marc

Soluție

a) $(x + y - 2)(2x - y - 1) = 2x^2 - y^2 - 5x + xy + y + 2.$ .... **(2p)**

b)

$$2x^2 + xy + y - 5x - y^2 + 2 = 2025$$

$$(x + y - 2)(2x - y - 1) = 2025$$

.... **(2p)**

Din $1 + x < 2y < -2(x + 13)$ se obține $x + y - 2 > 2x - y - 1$ și $x + y - 2 < -15$

Se alege $x + y - 2 = -27$ .... **(1p)**

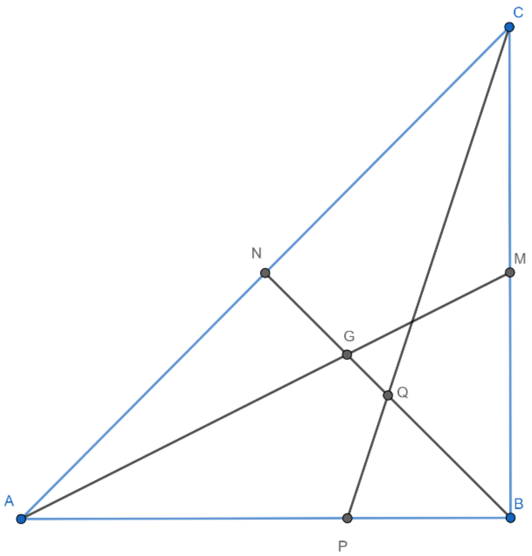
rezultă $x = -33$ și $y = 8$. .... **(2p)**

Subiectul 3. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, cu $\angle ABC = 90°$, punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AC, iar $\{G\} = BN \cap AM$. Fie punctul P pe dreapta AB astfel încât $PA = 2 \cdot PB$ și Q punctul de intersecție al dreptelor BN și CP.

a) Arătați că $AG = \frac{\sqrt{5}}{3} AB$

b) Arătați că $BM \cdot BP = BQ \cdot BG$.

Soluție



a)

Notăm $AB = BC = 6x \Rightarrow BM = MC = 3x$, ΔABC dreptunghic în B, G centrul de greutate al triunghiului ABC, AM mediană

$\Rightarrow AG = \frac{2}{3} AM = 2\sqrt{5}x = \frac{\sqrt{5}}{3} AB$..........**(2p)**

b) Fie $T = MN \cap CP$,

BN mediana corespunzătoare ipotenuzei AC

$BN = \frac{AC}{2} = NC \Rightarrow \Delta BNC$ isoscel.........**(1p)**

M mijlocul lui BC

$\Rightarrow NM \perp BC, AB \perp BC \Rightarrow NM \parallel AB$ și $TM \parallel PB$, atunci

TM linie mijlocie în ΔCBP

$TM = x$....................................**(1p)**

Q mijlocul lui BN

$\Rightarrow BQ = \frac{BN}{2} = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$..............................**(1p)**

$BG = \frac{2}{3} BN = 2\sqrt{2}x \Rightarrow BQ \cdot BG = 6x^2$..**(1p)**

$BM \cdot BP = 3x \cdot 2x = 6x^2 \Rightarrow BM \cdot BP = BQ \cdot BG$..**(1p)**

Subiectele au fost selectate de către

Prof. Pop Ovidiu

Stepan Dacian