CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA"
EDIŢIA A XXVII-A
06.05.2023

Clasa a IX-a
BAREM

Subiectul 1

a) Arătați că pentru orice număr real $x \in (0, \infty)$ are loc inegalitatea $x^3 - 3x + 2 \geq 0$;

b) Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ are loc

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}.$$

REZOLVARE

a) $x^3 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x - 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) \geq 0$
$(x-1)(x-1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0$..**(2p)**

b)

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} + 1$$

.............................**(2p)**

Notăm $\frac{a^2+b^2+c^2}{(ab+bc+ca)} = E$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{E}{2} + 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{E}{2} + 1 + \sqrt{\frac{1}{E}}$$

Ne rămâne de arătat $\frac{E}{2} + 1 + \sqrt{\frac{1}{E}} \geq \frac{5}{2}$..**(1p)**

Ca să ne folosim de subpunctul a) vom face următoarea substituție $E = x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2}} \geq \frac{3}{2}$

$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0$ ceea ce este adevărat. .... **(1p)**
Cazul de egalitate se realizează când $a = b = c$..**(1p)**

Subiectul 2. Fie punctele M, N și P pe laturile AB, BC, respectiv AC ale triunghiului ABC.

a) Să se arate că dacă centrul de greutate al triunghiului MNP aparține medianei din A al triunghiului ABC atunci:

$$\frac{2NB}{BC} = \frac{MA}{AB} + \frac{PC}{AC};$$

b) Dacă centrele de greutate ale triunghiurilor MNP și ABC coincid arătați că:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{BC} + \frac{PC}{AC}.$$

Soluție

a) Notăm $\frac{BN}{BC} = \alpha, \frac{MA}{AB} = \beta$ și $\frac{PC}{AC} = \gamma$ relația de demonstrat este $2\alpha = \beta + \gamma$

Avem $\frac{BN}{NC} = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{MA}{MB} = \frac{\beta}{1-\beta}$ și $\frac{PC}{AP} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \Rightarrow$

$\overrightarrow{r_M} = (1-\beta)\overrightarrow{r_A} + \beta\overrightarrow{r_B}, \overrightarrow{r_N} = (1-\alpha)\overrightarrow{r_B} + \alpha\overrightarrow{r_C}, \overrightarrow{r_P} = (1-\gamma)\overrightarrow{r_c} + \gamma\overrightarrow{r_A}$.

Dacă notăm cu G' centrul de greutate al ΔMNP , atunci

$\overrightarrow{r_{G'}} = \frac{1}{3}[(1-\beta+\gamma)\overrightarrow{r_A} + (1-\alpha+\beta)\overrightarrow{r_B} + (1-\gamma+\alpha)\overrightarrow{r_C}]$..**(2p)**

Luăm A originea vectorilor de poziție, atunci $\overrightarrow{r_A} = 0$ și A' mijlocul lui $BC \Rightarrow \overrightarrow{r_{A'}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$..... **(1p)**

Fie $G' \in AA' \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}^*$astfel încât $AG' = tAA' \Leftrightarrow \frac{1}{3}[(1-\alpha+\beta)\overrightarrow{r_B} + (1-\gamma+\alpha)\overrightarrow{r_C}] = \frac{t}{2}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$..**(1p)**

De unde $2 - 2\alpha + 2\beta = 3t$ și $2 - 2\gamma + 2\alpha = 3t \Leftrightarrow 2\alpha = \beta + \gamma$.. **(1p)**

b) Cu notațiile de la subpunctul a), egalitatea de demonstrat devine $\frac{\beta}{1-\beta} = \alpha + \gamma$................................ **(1p)**

Dacă centrele de greutate ale celor două triunghiuri coincid, atunci avem și relațiile

$2\beta = \alpha + \gamma, 2\gamma = \alpha + \beta$, deoarece G' aparține și medianelor din B și C ale triunghiului ABC.

Obținem $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, deci M, N, P sunt mijloacele laturilor $\Delta ABC \Rightarrow \frac{\beta}{1-\beta} = \alpha + \gamma$.................. **(1p)**

Subiectul 3. Determinați funcțiile $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că egalitatea

$$\frac{x+y-f(x)}{x+f(y)} + \frac{x+y-f(y)}{y+f(x)} = \frac{x+y}{f(x+y)}$$

are loc pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică 2/2023

Soluție

Pentru $x = y = 1$ obținem

$$\frac{2-f(1)}{1+f(1)} + \frac{2-f(1)}{1+f(1)} = \frac{2}{f(2)} \Rightarrow 2f(2) - f(1)f(2) = 1 + f(1)$$

$$2f(2) - f(1)f(2) - f(1) = 1 \Leftrightarrow f(2)\big(2-f(1)\big) + 2 - f(1) = 3$$

$$\big(2-f(1)\big)\big(f(2)+1\big)=3 \Rightarrow 2-f(1)=1\,;\ f(2)+1=3$$

Asta înseamnă că $f(1)=1\,;\ f(2)=2$. **(3p)**

Deduce $f(x)=x$ **(1p)**

Arătăm prin inducție că $f(x)=x$...................................... **(3p)**

Subiectele au fost selectate de către
Prof. POP OVIDIU