CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVII-A
06.05.2023
Clasa a X-a
BAREM

Subiectul 1.
Rezolvați ecuația

$$x^{\log_5 3} + x = 2 + 16\log_5 x.$$

Gazeta Matematică 10/2022

Soluție
a) Condițiile de existență $x \in (0,\infty)$, scrie forma echivalentă

$$3^{\log_5 x} + x = 2 + 16\log_5 x$$

$$3^y + 5^y = 2 + 16y, \text{ unde } y = \log_5 x. \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(2p)}$$

Funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(y) = 3^y + 5^y$ este strict convexă pe $\mathbb{R}$
Funcția $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $g(y) = 2 + 16y$ este liniară
Ecuația $f(y) = g(y)$ admite cel mult două soluții .... **(3p)**
Se obține $y \in \{0,2\}$, ceea ce implică $x \in \{1,25\}$ .... **(2p)**

Subiectul 2.
Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe distincte, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $Re(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}) = -\frac{3}{2}$. Arătați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Cornel Tivadar

Soluție
Fie $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.
$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}) = 0$ .... **(4p)**
Din $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 0$, rezultă $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ deci centrul de greutate al triunghiului ABC este O

Rezultă triunghiul ABC este echilateral .... **(3p)**

Problema 3.
a) Arătați că $5 > \pi\sqrt[10]{3^3}$.
b) Fie x, y, z trei numere strict pozitive astfel încât $x + y + z = \pi$. Arătați că

$$\frac{1}{\pi^{\sin 2x}} + \frac{1}{\sqrt{\pi^{\sin 2y}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^{\sin 2z}}} + \pi^{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z} > \pi.$$

Horvat-Marc Andrei

Soluție
a) Cum $625 = 5^4 > 2^9 = 512$, avem $5^{20} > 2^{45}$. Atunci $5^{20} > 2^{45} = 2^{40} \cdot 2^5 > 2^{40} \cdot 3^3$, deci

$$5^2 > 2^4 \cdot \sqrt[10]{3^3}$$

de unde se obține

$$5 > \frac{2^4}{5} \cdot \sqrt[10]{3^3} = \frac{16}{5} \cdot \sqrt[10]{3^3} = \frac{32}{10} \cdot \sqrt[10]{3^3} = 3{,}2 \cdot \sqrt[10]{3^3} > \pi \cdot \sqrt[10]{3^3}.$$

. . . . **(2p)**

b)

Fie

$$S=\frac{1}{\pi^{\sin 2x}}+\frac{1}{\pi^{\sin 2y}}+\frac{1}{\pi^{\sin 2z}}+\pi^{\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z}.$$

Suma S se poate scrie sub forma echivalentă

$$S=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2y}{2}}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2z}{3}}\right)+4\cdot\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{-4\sin x\sin y\sin z}{4}}\right),$$

care este o sumă ce conține zece termeni. . . . . **(1p)**

Se aplică inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a celor zece numere strict pozitive și se obține

$$S>10\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2y}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{\sin 2z}{3}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{-4\sin x\sin y\sin z}{4}}\right)^4}=$$

$$=10\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-4\sin x\sin y\sin z}\cdot\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4}}$$

$$=10\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-4\sin x\sin y\sin z}\cdot\frac{1}{2^{10}\cdot 3^3}}$$

deci

$$S>\frac{5}{\sqrt[10]{3^3}}\cdot\sqrt[10]{\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-4\sin x\sin y\sin z}}.$$

. . . . **(2p)**

Cum pentru $x+y+z=\pi$ are loc egalitatea $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=4\sin x\sin y\sin z$, rezultă $S>\frac{5}{\sqrt[10]{3^3}}$. . . . . **(1p)**

Din a) avem $\frac{5}{\sqrt[10]{3^3}}>\pi$, deci $S>\pi$. . . . . **(1p)**

Subiectele au fost selectate de către
Prof. TIVADAR CORNEL