CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVII-A
06.05.2023

Clasa a XI-a

Subiectul 1. a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că $Tr(A) = 0$ dacă și numai dacă

$$\det(A - I_2) = \det(A + I_2).$$

b) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A^k - I_2) = \det(A^k + I_2)$ pentru $k \in \{2022, 2023\}$.
Demonstrați că $A^2 = O_2$.

Soluție

a) Fie $f_A(X) = \det(A - XI_2)$, deci $f_A(1) = f_A(-1)$ se obține $Tr(A) = 0$ ....**(3p)**

b) Dacă λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale matricei A,
atunci $Tr(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k = 0$, pentru $k \in \{2022, 2023\}$
se obține $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
atunci $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, rezultă $A^2 = O_2$ ....**(4p)**

Subiectul 2. Fie $x_1, y_1 \in (0, \infty)$ și șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin relațiile de recurență

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot y_n + x_{n+1} \cdot y_n + \cdots + x_{2n} \cdot y_n}{x_n \cdot y_n + x_n \cdot y_{n+1} + \cdots + x_n \cdot y_{2n}}.$$

Andrei Horvat-Marc

Soluție

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{2n}{3} \cdot x_{n+1}, \quad n \geq 1 \qquad \textbf{(1p)}$$

Dacă $p_n = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n+3}{2n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{4n+1}{4n}$, $n \geq 1$, atunci

$$x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n} = \frac{2}{3} \cdot x_n \cdot [p_n \cdot 2n - 2n + 1], \qquad n \geq 1 \qquad \textbf{(2p)}$$

$$y_n + y_{n+1} + \cdots + y_{2n} = \frac{3}{2} \cdot (n+1) \cdot y_n, \quad n \geq 1 \qquad \textbf{(1p)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot y_n + x_{n+1} \cdot y_n + \cdots + x_{2n} \cdot y_n}{x_n \cdot y_n + x_n \cdot y_{n+1} + \cdots + x_n \cdot y_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n \cdot (x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n})}{x_n \cdot \left(y_n + y_{n+1} + \cdots + y_{2n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \left[p_n \cdot 2n - 2n + 1\right] \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{4}{9} \lim_{n\to\infty} \left[\left(p_n - 1\right) \cdot \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right] \qquad \textbf{(2p)}$$

Cum $\lim_{n\to\infty} p_n = \sqrt{2}$ se obține

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cdot y_n + x_{n+1} \cdot y_n + \cdots + x_{2n} \cdot y_n}{x_n \cdot y_n + x_n \cdot y_{n+1} + \cdots + x_n \cdot y_{2n}} = \frac{8}{9}\left(\sqrt{2} - 1\right) \qquad \textbf{(1p)}$$

Subiectul 3. Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n > 0$ și $a_n > 0$ pentru orice $n \geq 1$ și $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă cele două șiruri verifică egalitatea

$$e^{x_n} + \sin x_n = 1 + a_n \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_n}.$$

Soluție

Fie $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(t) = e^t + \sin t - 1$

Arată că f este bijectivă ....**(4p)**

Din $f(x_n) = a_n$ rezultă $x_n = f^{-1}(a_n)$, deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(a_n) = 0$$

se obține

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{x_n}-1}{x_n} + \frac{\sin x_n}{x_n}} = \frac{1}{2}.$$

....................**(3p)**

Subiectele au fost selectate de către
Prof. TIVADAR CORNEL