CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIŢIA A XXVII-A
06.05.2023

Clasa a XII-a

Subiectul 1. Fie G un grup cu $10n+1$ elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ şi H o submulțime cu proprietatea că $x^{-2} \cdot y^5 \in H$ pentru orice $x, y \in H$. Arătați că dacă $x^{-2} \cdot y^5 = y^5 \cdot x^{-2}$ pentru orice $x, y \in H$, atunci $x \cdot y = y \cdot x$ pentru orice $x, y \in H$.

Gazeta Matematică 1/2023

Soluție

Fie $k = ord(G) = 10n + 1$

Cum $(k, 10) = 1$, rezultă $1 = ak + 10b$, $a, b \in \mathbb{Z}$ .. .. **(1p)**

$x = x^1 = x^{ak+10b} = (x^k)^a \cdot (x^{-2})^{-5b} = (x^{-2})^{-5b}$ .... **(1p)**

$y = y^1 = y^{ak+10b} = (y^k)^a \cdot (y^5)^{2b} = (y^5)^{2b}$ .... **(1p)**

Din $x^{-2} \cdot y^5 = y^5 \cdot x^{-2}$ rezultă $x^{-2} \cdot y^{5p} = y^{5p} \cdot x^{-2}$, $(x^{-2})^q \cdot y = y \cdot (x^{-2})^p$ **(2p)**

Finalizare $x \cdot y = y \cdot x$ **(2p)**

Subiectul 2. Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua continua şi $a \in (0,1)$. Calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n \cdot f(0)}{\ln a} + n^2 \int_0^1 a^{nx} f(x)dx\right),$$

unde $f'(0) = 1$.

Vasile Giurgi

Soluție

Arată că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a^{nx} f(x)dx = 0$$

(1p)

Aplicând integrarea prin părţi obţinem

$$n\int_0^1 a^{nx} f(x)dx = f(1)\frac{a^n}{\ln a} - \frac{f(0)}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int_0^1 a^{nx} f'(x)dx\,.$$

(2p)

Notăm cu I_n şirul a cărui limită se cere. Deci

Colegiul Național ”Dragoș Vodă”
Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0262.311.958 /Fax 0262.318.509
Email: cndv.sighet@gmail.com, Web: www.cndv.ro

$$I_n = n\cdot\frac{a^n f(1)}{\ln a} - \frac{n}{\ln a}\int_0^1 a^{nx} f'(x)dx .$$

(1p)

Aplicând din nou integrarea prin părţi obţinem

$$I_n = \frac{na^n f(1)}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\left(\frac{a^n f'(1)}{\ln a} - \frac{f'(0)}{\ln a} - \int_0^1 a^{nx} f''(x)dx\right).$$

(2p)

Deoarece derivata a doua este continuă, vom obţine că limita $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 a^{nx} f''(x)dx = 0.$

Trecând la limită în şirul I_n vom obţine că $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{f'(0)}{\ln^2 a}$. **(1p)**

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, și funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă și monotonă. Arătați că funcția $F: [a, b] \to \mathbb{R}$, cu

$$F(x) = x\cdot\int_a^b f(t)dt - a\cdot\int_x^b f(t)dt - b\cdot\int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

are semn constant pe $[a, b]$.

Soluție

Pentru orice $x \in [a, b]$ are loc

$$F(x) = (x-a)\cdot\int_x^b f(t)dt + (x-b)\cdot\int_a^x f(t)dt$$

. . . . **(3p)**

Din Teorema de medie există $c_x \in [x, b]$ și $d_x \in [a, x]$ pentru care
$F(x) = (x-a)(b-x)f(c_x) + (x-b)(x-a)f(d_x)$
Numerele $f(d_x) - f(c_x)$ și $(x-a)(b-x)$ au același semn
Deci F are semn constant pe $[a, b]$

. . . . **(4p)**

Subiectele au fost selectate de către
Prof. GIURGI VASILE