CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVII-A
05.05.2023
Clasa a VIII-a
BAREM

Subiect 1. Aflați valoarea maximă a expresiei

$$E(x,y) = -9x^2 - 4y^2 + 48x - 140y + 734,$$

unde x și y sunt numere reale.

Soluție

$E(x,y) = -(9x^2 - 48x) - (4y^2 + 140y) + 734$ **1 p**

$E(x,y) = -((3x)^2 - 2\cdot 3x \cdot 8 + 8^2 - 8^2)$
$\quad - ((2y)^2 + 2\cdot 2y\cdot 35 + 35^2 - 35^2) + 734$ **2 p**

$E(x,y) = -((3x-8)^2 - 8^2) - ((2y+35)^2 - 35^2) + 734$

$E(x,y) = -(3x-8)^2 + 8^2 - (2y+35)^2 + 35^2 + 734$

$E(x,y) = 734 + 64 + 1225 - (3x-8)^2 - (2y+35)^2$ **2 p**

$E(x,y) = 2023 - (3x-8)^2 - (2y+35)^2$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $(3x-8)^2 \geq 0$

Pentru orice y$\in \mathbb{R}$ avem $(2y+35)^2 \geq 0$ **2 p**

Rezultă că valoarea maximă a expresiei este 2023

Vraja-Lőkös Éva-Ibolya

Subiect 2.

a) Arătați că pentru orice număr real $x > 0$ are loc inegalitatea

$$\left(\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x}}\right)^2 < 1 + \frac{1}{x}.$$

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele

$$x = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{4}-\sqrt{3})\cdot \ldots \cdot (\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})$$
$$y = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}+\sqrt{3})\cdot \ldots \cdot (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}).$$

i) Arătați că $x + y > 2$.

ii) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalitățile $y < x < (n+1)y$.

Soluție

a) $\left(\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2x(2x+1)}} < 1 + \frac{1}{x}$. . . . . **(2p)**

b)

i) Cum $x \cdot y = 1$, din inegalitatea mediilor, rezultă $x + y > 2\sqrt{x\cdot y} = 2$. . . . . **(1p)**

ii) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}>1$$

Din $x\cdot y=1$, se obține $y<1<x$. . . . . **(2p)**

Cum

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}\right)^2$$

folosind inegalitatea de la **a)** se obține

$$\frac{x}{y}<\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}=n+1$$

În concluzie $y<x<(n+1)y$. . . . .**(2p)**

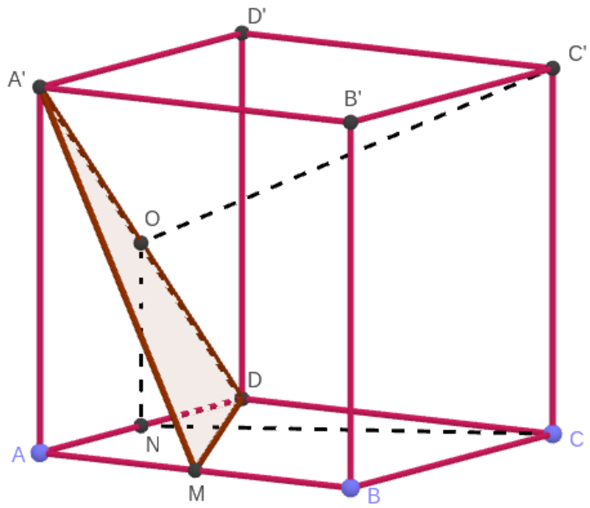
Problema 3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB=a$, $a>0$. Fie M mijlocul muchiei AB, N mijlocul muchiei AD, iar O centrul feței $ADD'A'$.

a) Demonstrați că dreapta $C'O$ este perpendiculară pe planul $(A'MD)$.

b) Determinați tangenta unghiului diedru format de planele $(C'MN)$ și $(C'CD)$.

Gazeta Matematică 11/2022

Soluție



a) Arată $C'O\perp A'D$ . . . . **(1p)**

Arată $MD\perp CN$ . . . . **(1p)**

Arată $MD\perp C'O$ . . . . **(1p)**

Finalizare $C'O\perp(A'MD)$ . . . .. **(1p)**

b) $MN\cap DC=\{R\}$

$(CC'D)\cap(C'MN)=RC'$ ...... **(1p)**

$DP\perp C'R, P\in C'R$

$NP\perp C'R$

Unghiul diedru $\sphericalangle NPD$ **(1p)**

$$\mathrm{tg}(\sphericalangle NPD)=\frac{ND}{DP}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

. . . . . . **(1p)**

Subiectele au fost selectate de către
Prof. GIURGI VASILE