TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XII-a 2022,
Târgu Lăpuș, 29.08.2022-04.09.2022
Clasa a XII-a

1. Într-un grup $(G, *)$, pentru $x \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$ vom nota $x^n = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ n\ ori}$.

Arătați că dacă $a, b, c \in G$ astfel încât $a^3 * b^3 = c^3$, $a^4 * b^4 = c^4$ și $a^5 * b^5 = c^5$, atunci $a * b = b * a = c$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă. Demonstrați că pentru orice primitivă F a lui *f*, există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(c) - F^2(c) < 1$.

3. **a.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Arătați că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, atunci $\left(x^n \cdot F(x)\right)' = x^{n-2} \cdot \left(n \cdot x \cdot F(x) + x^2 \cdot f(x)\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b. Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ și pentru care $4x \cdot F(x) + x^2 \cdot f(x) = 3f\left(x^3\right)$, $\forall x > 0$.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore