TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a X-a

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)=3x+f\left(f\left(y\right)-2x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a. Arătați că funcția f este surjectivă.

b. Determinați toate funcțiile care verifică condițiile de mai sus.

2. **a.** Arătați că

$$|a|\cdot|b-c|\le|b||c-a|+|c|\cdot|a-b|,\forall a,b,c\in\mathbb{C}.$$

b. Dacă O este un punct în planul triunghiului ABC arătați că

$$OA\sin A\le OB\sin B+OC\sin C.$$

.

3. Fie $n\ge 3$ un număr natural. Pe fiecare din laturile de lungime n ale unui triunghi echilateral se consideră câte $n-1$ puncte care o împart în n segmente de lungime 1. Prin aceste puncte se duc paralele la laturile triunghiului și se obține o rețea de triunghiuri de latură 1. Notăm cu M mulțimea tuturor vârfurilor acestor triunghiuri.

a. Determinați mulțimea A a tuturor numerelor naturale n pentru care M conține un număr par de puncte și conține centrul de greutate al triunghului.

b. Pentru $n\in A$, considerăm o mulțime V de vectori ale căror capete (originea și vârful) sunt toate distincte și formează mulțimea M. Notăm cu $\vec{v}$ suma vectorilor din V. Arătați că $\left|\vec{v}\right|^2$ este un număr natural divizibil cu 4.

Cristi Săvescu

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ_CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a X-a
BAREM

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică

$$f\left(f\left(x\right)+y\right)=3x+f\left(f\left(y\right)-2x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a. Arătați că funcția f este surjectivă.

b. Determinați toate funcțiile care verifică condițiile de mai sus.

Soluție. **a.** Pentru $y=-f\left(x\right)\Rightarrow f\left(0\right)=3x+f\left(f\left(-f\left(x\right)\right)-2x\right)$, adică

$f\left(f\left(-f\left(x\right)\right)-2x\right)=-3x+f\left(0\right)$. **2p**

Fie $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g\left(x\right)=-3x+f\left(0\right),h\left(x\right)=f\left(-f\left(x\right)\right)-2x$ atunci relația se scrie

$\left(f\circ h\right)\left(x\right)=g\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R},$ iar funcția g este surjectivă $\Rightarrow$ funcția f este surjectivă........................**2p**

b. Deoarece f este surjectivă $\Rightarrow\exists x_0\in\mathbb{R}$ cu $f\left(x_0\right)=0$.

Pentru $x=x_0\Rightarrow f\left(y\right)=3x_0+f\left(f\left(y\right)-2x_0\right)\Rightarrow f\left(y\right)-2x_0=x_0+f\left(f\left(y\right)-x_0\right),\forall y\in\mathbb{R}$.

Din nou f este surjectivă deci pentru $\forall t\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}$ astfel încât $f\left(y\right)=t+2x_0\Leftrightarrow f\left(y\right)-2x_0=t$

Ecuația devine $t=x_0+f\left(t\right)\Rightarrow f\left(t\right)=t-x_0$

Verificând în ecuația dată avem $x+y-2x_0=3x+y-2x-2x_0\left(A\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$

Deci funcțiile cerute sunt de forma $f\left(x\right)=x+c,c\in\mathbb{R}$. **3p**

2. **a.** Arătați că

$$|a|\cdot|b-c|\le|b||c-a|+|c|\cdot|a-b|,\forall a,b,c\in\mathbb{C}.$$

b. Dacă O este un punct în planul triunghiului ABC arătați că

$$OA\sin A\le OB\sin B+OC\sin C.$$

Soluție. **a.** $a\left(b-c\right)=b\left(a-c\right)+c\left(b-a\right)\Leftrightarrow ab-ac=ab-bc+bc-ac\left(A\right),\forall a,b,c\in\mathbb{C}$......................**2p**

Atunci $|a|\cdot|b-c|=|a\left(b-c\right)|=|b\left(a-c\right)+c\left(b-a\right)|\le|b\left(a-c\right)|+|c\left(b-a\right)|=|b||c-a|+|c||b-a|$. **2p**

b. Alegem un reper cu originea în O și $A\left(a\right),B\left(b\right),C\left(c\right)$. Atunci $|a|=OA,|b-c|=BC=2R\sin A$ și analoagele. Înlocuim în relația de la **a.** și rezultă concluzia. **3p**

3. Fie $n\ge3$ un număr natural. Pe fiecare din laturile de lungime n ale unui triunghi echilateral se consideră câte $n-1$ puncte care o împart în n segmente de lungime 1. Prin aceste puncte se duc paralele la laturile triunghiului și se obține o rețea de triunghiuri de latură 1. Notăm cu M mulțimea tuturor vârfurilor acestor triunghiuri.

a. Determinați mulțimea A a tuturor numerelor naturale n pentru care M conține un număr par de puncte și conține centrul de greutate al triunghului.

b. Pentru $n \in A$, considerăm o mulțime V de vectori ale căror capete (originea și vârful) sunt toate distincte și formează mulțimea M. Notăm cu $\vec{v}$ suma vectorilor din V. Arătați că $|\vec{v}|^2$ este un număr natural divizibil cu 4.

Cristi Săvescu

Soluție. **a.** Pentru ca $G \in M$, trebuie ca dreapta paralelă cu una din laturile triunghiului mare care trece prin G să fie din rețea. Aceasta intersectează celelalte două laturi în punctele $X, Y \in M$ care împart aceste laturi în raport $2:1$. Atunci, deducem că $n = 3k$. **2p**
Cum G este mijlocul lui XY și $XY = 2k$, deducem că $G \in M$.

Pentru ca M să aibă un număr par de puncte, atunci 2 divide $1+2+3+...+(n+1) = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$,

deci $4 \left| (3k+1)(3k+2) \right. \Leftrightarrow 4 \left| (k+3)(k+2) \right. \Rightarrow k = 4p+1$ sau $k = 4p+2, p \in \mathbb{N}$ deci $n = 12p+3$ sau $n = 12p+6, p \in \mathbb{N}$. **2p**

b. Fie $M = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$. Cum G este centrul de greutate pentru M, avem $\sum \overrightarrow{GA_1} = 0 \ (1)$

Cum $\vec{v} = \sum \overrightarrow{B_iC_i} = \sum \left(\overrightarrow{B_iG} + \overrightarrow{GC_i} \right)$ iar punctele B_i, C_i formează mulțimea M avem că

$\vec{v} = \sum \overrightarrow{A_iG} + 2\sum \overrightarrow{GC_i} \overset{(1)}{=} 2\sum \overrightarrow{GC_i}$. Atunci $|\vec{v}|^2 = 4\left| \sum \overrightarrow{GC_i} \right|^2$. **2p**

Toți vectorii $\overrightarrow{GC_i}$ se descompun în câte doi vectori, fiecare pe una din două direcții date dintre laturile triunghiului. Atunci $\sum \overrightarrow{GC_i}$ va avea componentele a și b pe aceste direcții, $a, b \in \mathbb{Z}$, iar cum unghiul dintre ele este de 60° sau 120°, avem $\left| \sum \overrightarrow{GC_i} \right|^2 = a^2 + b^2 \pm ab \in \mathbb{N}$, de unde rezultă concluzia. **1p**