TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023

Clasa a XII-a

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$ și mulțimea $G=\left\{A^k \;\middle|\; k\in\mathbb{N}^*\right\}\subset M_3(\mathbb{Z})$.

a. Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe mulțimea *G*;
b. Studiați existența elementului neutru;
c. Determinați toate valorile $n, k\in\mathbb{N}^*, n\geq k$, astfel încât ecuația matriceală $X^n = A^k$ să aibă soluție unică în $M_3(\mathbb{Z})$.

2. Determinați funcțiile primitivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac egalitatea $F(x)-F(1)=x\cdot f(x)-\ln\sqrt{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$, unde *F* este o primitivă a funcției *f*.

3. Fie numerele reale $a<b$ și $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție strict monotonă și primitivabilă. Arătați că:

a. funcția *f* este continuă;
b. pentru orice număr $c\in(a,b)$ există $x_1, x_2\in(a,b)$ distincte, astfel încât $f(c)=\dfrac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}$, unde *F* este o primitivă a funcției *f*.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,

pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,

Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023

Clasa a XII-a

BAREM

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$ și mulțimea $G=\left\{A^k \,\middle|\, k\in\mathbb{N}^*\right\}\subset M_3(\mathbb{Z})$.

a. Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe mulțimea *G*;

b. Studiați existența elementului neutru;

c. Determinați toate valorile $n, k\in\mathbb{N}^*, n\geq k$, astfel încât ecuația matriceală $X^n=A^k$ să aibă soluție unică în $M_3(\mathbb{Z})$.

Soluție: **a.** Evident. **1p**

b. Inductiv $A^k=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \forall k\in\mathbb{N}^*$. Pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, $A^k\cdot A^m=\begin{pmatrix}1&0&k+m\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\neq A^k$. Legea nu admite element neutru. **2p**

c. Fie $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$.

Din $X^{n+1}=X\cdot A^k=A^k\cdot X$, rezultă $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&k\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, ceea ce conduce la $X=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&e&0\\0&0&a\end{pmatrix}$. Inductiv obținem $X^n=\begin{pmatrix}a^n&0&na^{n-1}c\\0&e^n&0\\0&0&a^n\end{pmatrix}$. **2p**

Rezolvarea ecuației matriceale revine la rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a sistemului $\begin{cases}a^n=1\\na^{n-1}c=k\\e^n=0\end{cases}$, necunoscutele fiind *a*, *c* și *e*. Evident $e=0$ și $a\neq 0, c\neq 0$. Din a doua ecuație rezultă $n\leq k$ și apoi, având în vedere ipoteza, $n=k$. Așadar sistemul se rezumă la $\begin{cases}a^n=1\\a^{n-1}c=1\end{cases}$. Evident sistemul admite soluție unică dacă și numai dacă *n* este impar. Răspunsul este $n=k\in 2\mathbb{N}+1$. **2p**

2. Determinați funcțiile primitivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac egalitatea $F(x)-F(1)=x\cdot f(x)-\ln\sqrt{1+x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$, unde *F* este o primitivă a funcției *f*.

Soluție: Pentru $x\neq 0$, deoarece $f(x)=\dfrac{F(x)-F(1)+\ln\sqrt{1+x^2}}{x}$, rezultă că *f* este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$. **1p**

Derivând egalitatea din problemă, obținem $\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + x \cdot f'(x) - \frac{x}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Rezultă că $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*$ și de aici $f(x) = \begin{cases} arctgx + c_1, \text{ dacă } x<0 \\ c_2, \text{ dacă } x=0 \\ arctgx + c_3, \text{ dacă } x>0 \end{cases}$. **2p**

Deoarece limitele laterale în $x=0$ există, rezultă că *f* este continuă în $x=0$ și de aici $c_1 = c_2 = c_3$. **2p**

Așadar $f(x) = arctgx + c_1, \forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x=1$ egalitatea din problemă devine $0 = 1 \cdot (arctg1 + c_1) - \ln\sqrt{2}$ și de aici $c_1 = -\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$. Rezultă $f(x) = arctgx - \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

3. Fie numerele reale $a<b$ și $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție strict monotonă și primitivabilă. Arătați că:

a. funcția *f* este continuă;

b. pentru orice număr $c \in (a,b)$ există $x_1, x_2 \in (a,b)$ distincte, astfel încât $f(c) = \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2}$, unde *F* este o primitivă a funcției *f*.

Soluție: **a.** *f* fiind monotonă și având proprietatea lui Darboux, este continuă. **2p**

b. Considerăm funcția *f* strict crescătoare, pentru *f* strict descrescătoare demonstrația fiind similară. Fie $c \in (a,b)$. Egalitatea din concluzie este echivalentă cu $F(x_1) - x_1 \cdot f(c) = F(x_2) - x_2 \cdot f(c)$.

Considerăm funcția $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = F(x) - x \cdot f(c)$. Evident g este derivabilă și $g'(x) = f(x) - f(c)$. Observăm că g' este continuă. **3p**

Deoarece $g'(a) = f(a) - f(c) < 0$ și $g'(b) = f(b) - f(c) > 0$, există $\alpha, \beta \in (a,b); \alpha < \beta$ astfel încât $g'(\alpha) < 0$ și $g'(\beta) > 0$. Deducem că pe intervalul $[\alpha, \beta]$ funcția *g* nu este strict monotonă și deci nu este injectivă. Rezultă că există $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \subset (a,b)$, distincte astfel ca $g(x_1) = g(x_2)$, de unde rezultă cerința. **2p**