TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,

pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,

Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023

Clasa a VIII-a

1. **a.** Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real *x*, rezolvați ecuația $\left[\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right]=\frac{x-1}{3}$.

b. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ cu $a+b+c=1$. Demonstrați că $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\le\frac{3}{2}$.

2. Demonstrați că printre $n+1$ numere alese din mulțimea $\{1,2,...,2n\}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, există două astfel încât unul îl divide pe celălalt.

3. Fie cubul *DIAMETRU*, de latură $a>0$, punctele *P*, *Q* mijloacele muchiilor (*DI*), respectiv (*DE*), iar semidreptele (*TB* și (*TC* sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle UTE$, respectiv $\sphericalangle UTR$, cu $B\in(UE), C\in(RU)$.

a. Arătați că $BC\parallel(UDA)$.

b. Construiți punctele $K\in(DM), L\in(MQ)$, astfel încât $PK+KL$ să fie minim. Exprimați acest minim în funcție de muchia cubului.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a VIII-a
<u>BAREM</u>

1. **a.** Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real *x*, rezolvați ecuația $\left[\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right]=\frac{x-1}{3}$.

b. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ cu $a+b+c=1$. Demonstrați că $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\le\frac{3}{2}$.

Soluție:

a. $\sqrt{\frac{x+2}{3}}\ge 0\Rightarrow\left[\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right]\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{x-1}{3}=n\in\mathbb{N}$ **1p**

$\Rightarrow x=3n+1\Rightarrow\sqrt{\frac{x+2}{3}}=\sqrt{n+1}\Rightarrow\left[\sqrt{n+1}\right]=n$ **1p**

$n\le\sqrt{n+1}<n+1, n\in\mathbb{N}\Rightarrow n(n-1)\le 1\Rightarrow n\in\{0,1\}$. Convine doar $n=1$ **1p**

Obținem soluția $x=4$. **1p**

b. $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+1-a-b}}=\sqrt{\frac{a}{1-b}\cdot\frac{b}{1-a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a}\right)$..**2p**

Însumând inegalitățile analoage obținem concluzia. **1p**

2. Demonstrați că printre $n+1$ numere alese din mulțimea $\{1,2,...,2n\}$ există două astfel încât unul îl divide pe celălalt.

Soluție:

Fie $a_1,a_2,...,a_{n+1}$ scrise sub forma $a_i=2^k\cdot b_i, k\in\mathbb{N}$, b_i impar, $i=\overline{1,n+1}$. **1p**

Avem $a_i\in[1,2n]\Rightarrow b_i\in[1,2n-1]$. **1p**

În acest interval avem *n* numere impare și folosind principiul cutiei la alegerea a $n+1$ numere impare cel puțin două vor fi egale. **4p**

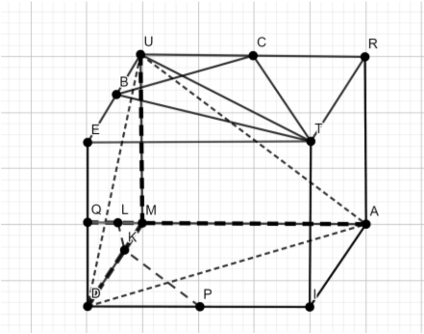
Fie $b_v=b_w, v\ne w\Rightarrow$ între a_v,a_w există relația de divizibilitate. **1p**

3. Fie cubul *DIAMETRU*, de latură $a>0$, punctele *P*, *Q* mijloacele muchiilor (*DI*), respectiv (*DE*), iar semidreptele (*TB* și (*TC* sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle UTE$, respectiv $\sphericalangle UTR$, cu $B\in(UE), C\in(RU)$.

a. Arătați că $BC\parallel(UDA)$.

b. Construiți punctele $K\in(DM), L\in(MQ)$, astfel încât $PK+KL$ să fie minim. Exprimați acest minim în funcție de muchia cubului.

Soluție:



a. Conforn teoremei bisectoarei avem $\frac{UB}{BE}=\frac{UT}{ET}$ și $\frac{UC}{CR}=\frac{UT}{RT}$ **1p**

$\Rightarrow \frac{UB}{BE}=\frac{UC}{CR} \overset{R.T.Th.}{\Rightarrow} BC \parallel ER$ **1p**

Din $BC \parallel ER$ și $ER \parallel DA \Rightarrow BC \parallel DA$.

Din $BC \parallel DA, DA \subset (UDA), BC \not\subset (UDA) \Rightarrow BC \parallel (UDA)$ **1p**

b. Desfășurăm planele (MDI) și $(MED) \Rightarrow PK + KL$ este minim dacă *P*, *K*, *L* coliniare și $PL \perp MQ$ **2p**

$MP = \frac{a\sqrt{5}}{2}, A_{\Delta MQP} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow PL = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ **2p**