

Olimpiada Națională de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 10 februarie 2024
Clasa a IX - a

1. Determinați toate perechile de numere întregi (x, y) care verifică relația

$$x^3 - y^3 = (x - y)^2$$

2. a) Arătați că oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ și pentru orice $a, b \in (0, \infty)$ are loc inegalitatea

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b}.$$

- b) Fie $x, y, z > 0$, cu $2xyz = 1$. Demonstrați că

$$\frac{x \cdot y^2}{x^3 + 1} + \frac{y \cdot z^2}{y^3 + 1} + \frac{z \cdot x^2}{z^3 + 1} \geq 1$$

3. În triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC$ și $BC = 1$, fie punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $AM = CN$. Notăm cu E mijlocul segmentului MN și cu P simetricul lui A față de E . Calculați modulul vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CM}$ în funcție de numărul real $k = \frac{PM}{PN}$.

(S.G.M. 9/2023)

4. Arătați că dacă $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ și $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2, atunci n este o putere a lui 2.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru - 3 ore