Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 13-a, Ianuarie 2024

Soluţii si bareme - Clasa a 10-a

Problema 1

Determinaţi funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $n \geq 2$, care verifică condiţiile:

$$f_1 \circ f_2 = f_1,\ f_2 \circ f_3 = f_2,\ \ldots\ f_n \circ f_1 = f_n, \tag{1}$$

ştiind că f_1 este surjectivă.

Vasile Pop, Cluj Napoca şi *Mihai Opincariu*, Brad

Soluţie

Vom demonstra prin inducţie după n propoziţia:

$$P(n):\ f_1^2 = f_1,\ f_2^2 = f_2, \ldots, f_n^2 = f_n.$$

Pentru $n = 2$ ipoteza devine $f_1 \circ f_2 = f_1$ şi $f_2 \circ f_1 = f_2$, din care rezultă $f_1 \circ f_2 \circ f_1 = f_1^2$ şi $f_1 \circ f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = f_1$, deci $f_1^2 = f_1$ şi analog $f_2^2 = f_2$.

Pentru $P(n)$ ultimele două relaţii din (1) dau: $f_{n-1} \circ f_n = f_{n-1}$ şi $f_n \circ f_1 = f_n$, din care rezultă $f_{n-1} \circ f_n \circ f_1 = f_{n-1} \circ f_1$ şi $f_{n-1} \circ f_n \circ f_1 = f_{n-1} \circ f_n = f_{n-1}$, deci $f_{n-1} \circ f_1 = f_{n-1}$.

Din ipoteză reţinem primele $(n-2)$ relaţii la care adăugăm $f_{n-1} \circ f_1 \equiv f_{n-1}$ şi suntem în ipoteza propoziţiei $P(n-1)$, deci $f_1^2 = f_1,\ f_2^2 = f_2, \ldots, f_{n-1}^2 = f_{n-1}$.

Deoarece f_1 este surjectivă, din $f_1^2 \equiv f_1$, rezultă $f_1(f_1(x)) = f_1(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f_1(y) = y,\ \forall\ y \in \mathbb{R}$ deci $f_1 = 1_{\mathbb{R}}$ şi apoi din relaţia (1) de la prima spre ultima rezultă $f_2 = 1_{\mathbb{R}},\ f_3 = 1_{\mathbb{R}}, \ldots, f_n = 1_{\mathbb{R}}$.

Problema 2

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Arătaţi că

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} kp \cos \frac{2(k-p)\pi}{n} > \frac{n^4}{4\pi^2}.$$

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie

Notăm cu $x_k = \frac{2k\pi}{n}, \forall k \geq 1$. Atunci avem succesiv

$$a = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} kp \cos(x_k - x_p) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} kp \cos x_k \cos x_p + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} kp \sin x_k \sin x_p =$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} k \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} k \sin x_k)^2.$$

Atunci, dacă notăm cu $z = \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^n$, unde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, avem $a = |z|^2$. Din calcul rezultă însă că $z = \frac{-n\varepsilon}{1-\varepsilon}$, deci $|z|^2 = \frac{n^2}{|1-\varepsilon|^2} = \frac{n^2}{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}$.

Arătăm că $1 - \cos \frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi^2}{n^2}$. Într-adevăr, $1 - \cos \frac{2\pi}{n} = 2\sin^2 \frac{\pi}{n} < 2\frac{\pi^2}{n^2}$.

Observaţie: Alternativ, se observă că $2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}$ este pătratul laturii L unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitar (teorema lui Pitagora generalizată). Perimetrul unui astfel de poligon este strict mai mic decât perimetrul cercului, care este 2π, deci $L^2 < \frac{4\pi^2}{n^2}$.

Problema 3

Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $f(m)+f(n) = f(m+n)$, pentru orice numere $m, n \in \mathbb{N}^*$ care au proprietatea că $m - n$ se divide cu 3.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Observăm că funcţia $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definită prin $g(n) = f(3n)$ este o funcţie aditivă, deci dacă notăm cu $b = g(1) = f(3)$, avem $g(n) = ng(1) = nb$. Deducem atunci că $f(3n) = nb, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mai departe, notăm cu $a = f(1)$. Atunci $f(2) = f(1) + f(1) = 2a$. Arătăm prin inducţie după $k \geq 1$ că $f(3k + 1) = (3k + 1)a$ şi $f(3k + 2) = (3k + 2)a$. Cazul $k = 1$ este deja tratat.

Presupunem că $f(3k+1) = (3k+1)a$ şi $f(3k+2) = (3k+2)a$. Atunci $3|(3k+2)-2$, deci $f(3(k + 1) + 1) = f(3k + 2) + f(2) = (3k + 2)a + 2a = (3(k + 1) + 1)a$.

Apoi, $3|[(3(k + 1) + 1] - 1$, deci $f(3(k + 1) + 2) = f(3(k + 1) + 1) + f(1) = (3(k + 1) + 1)a + a = (3(k + 1) + 2)a$.

Concluzionăm că funcţiile căutate sunt $f(n) = na$, dacă $3 \not| n$ şi $f(n) = \frac{n}{3}b$, dacă $3|n$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Reciproc, observăm că aceste funcţii verifică relaţia dată.

Problema 4

Fie $A_1A_2\dots A_n, n \geq 3$ un poligon regulat înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi d o dreaptă din plan cu proprietatea că, pentru fiecare $i = 1, 2, \dots, n$, paralela la d prin A_i nu este tangetă la $\mathcal{C}$ şi intersectează a doua oară $\mathcal{C}$ în B_i. Arătaţi că următoarele expresii nu depind de alegerea dreptei d:

a) $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i}$ b) $p = \sum\limits_{i=1}^{n} A_iB_i^2$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Considerăm planul complex cu originea în centrul cercului $\mathcal{C}$, orientat astfel încât d este paralelă la $(Oy$. Atunci, dacă notăm cu a_k şi b_k afixele punctelor A_k, respectiv B_k, pentru $k = 1, 2, \dots, n$, vom avea $b_k = \overline{a_k}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

a) Avem $s = \sum\limits_{i=1}^{n} a_k - \overline{a_k} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_k - \overline{\sum\limits_{i=1}^{n} a_k} = 0 - 0 = 0$, întrucât faptul că poligonul $A_1A_2\dots A_k$ este regulat implică $\sum\limits_{i=1}^{n} a_k = 0$.

b) Avem $p = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_k - \overline{a_k}|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_k - \overline{a_k})(\overline{a_k} - a_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2r - \sum\limits_{i=1}^{n} a_k^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a_k}^2 = 2nr - \sum\limits_{i=1}^{n} a_k^2 - \overline{\sum\limits_{i=1}^{n} a_k^2}$, unde r este raza lui $\mathcal{C}$.

Din faptul că $A_1A_2\dots A_n$ este regulat deducem că, dacă notăm cu $a = a_1$, vom avea $a_k = a \cdot \varepsilon^{k-1}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_k^2 = a^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon^{2(k-1)} = 0$, deci $p = 2nr$.