Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 13-a, Ianuarie 2024

Soluţii şi bareme - Clasa a 11-a

Problema 1

Fie numerele naturale nenule r şi p. Arătaţi că există şirurile de numere naturale nenule $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că şirurile $\left(\left[\dfrac{a_n}{b_n}\right]\right)_{n\geq 1}$ şi $\left(\left[\dfrac{a_n}{b_n^2}\right]\right)_{n\geq 1}$ sunt progresii aritmetice de raţii r, respectiv p, dacă şi numai dacă r este divizibil cu p.

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie

Dacă r este divizibil cu p, există $t \in \mathbb{N}^*$ pentru care $r = tp$. Considerăm atunci şirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin $a_k = rtk$, pentru orice $k \geqslant 1$ şi şirul $(b_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin $b_k = t$, pentru orice $k \geqslant 1$.

Reciproc, dacă $\left(\left[\dfrac{a_n}{b_n}\right]\right)_{n\geq 1}$ este progresie de raţie r, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\dfrac{a_n}{b_n}\right]}{n} = r$. Dar, folosind criteriul cleştelui şi definiţia părţii întregi, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\dfrac{a_n}{b_n}\right]}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_n}{b_n}}{n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_n}{b_n}}{n} = r$. Analog, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{a_n}{b_n^2}}{n} = p$. Atunci $\dfrac{r}{p} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\dfrac{a_n}{b_n}}{n}}{\dfrac{\dfrac{a_n}{b_{n^2}}}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi fiind un şir de numere naturale, limita sa este $b \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\dfrac{r}{p} = b$, deci r este divizibil cu p.

Problema 2

Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ care au proprietatea că $A^2 + B^2 = O_n$ şi $\det(AB - BA) \neq 0$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Arătăm că n este număr par. Avem:

$$(A + iB)(A - IB) = A^2 + B^2 - i(AB - BA) = -i(AB - BA) \tag{1}$$

$$(A - iB)(A + iB) = A^2 + B^2 + i(AB - BA) = i(AB - BA) \tag{2}$$

Trecând la determinanţi în (1) şi (2) obţinem:

$$(-i)^n \det(AB - BA) = (i)^n \det(AB - BA),$$

deci

$$(-i)^n = (i)^n \Leftrightarrow (-1)^n = 1 \Leftrightarrow n \text{ par}.$$

Vom arăta că această condiţie este şi suficientă dând exemplu de matrice A, B de ordin par care satisfac condiţiile.

Pentru $n = 2$ luăm

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi avem:

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

deci $A_2^2 + B_2^2 = 0$.

$$A_2B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2B_2 - B_2A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

şi

$$\det(A_2B_2 - B_2A_2) = -4 \neq 0.$$

Pentru $n = 2k$ considerăm matricele cu blocuri pe diagonală:

$$A_{2k} = \begin{pmatrix} A_2 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_2 \end{pmatrix}, \quad B_{2k} = \begin{pmatrix} B_2 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_2 \end{pmatrix}$$

(şi în rest zero), pentru care evident:

$$A_{2k}^2 + B_{2k}^2 = O_{2k}$$

şi

$$\det(A_{2k}B_{2k} - B_{2k}A_{2k}) = (-4)^k \neq 0.$$

Problema 3

Fie matricea $A \in M_n(\mathbb{Z})$, unde $n \geqslant 2$ este prim. Arătaţi că $\det(A + A^T) \neq n$.

Mihai Opincariu, Brad

Soluţie

Presupunem prin reducere la absurd contrariul. Pentru $n = 2$ fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Atunci $\det(A + A^T) = 4ad - (b + c)^2$. Dacă $4ad - (b + c)^2 = 2$, atunci $2|b + c$, deci $4|2$, fals. Deducem că $n \geq 3$. Cum n este prim, n va fi impar

Avem $\det(A - A^T) = \det((A - A^T)^T) = \det(A^T - A) = (-1)^n \det(A - A^T) = -\det(A - A^T)$, deci $\det(A - A^T) = 0$.

Polinomul $P(X) = \det(A + XA^T)$ are toţi coeficienţii întregi iar $P(-1) + P(1)$ este par. Atunci deducem că $P(1) = \det(A + A^T) = n$ este par, contradicţie.

Problema 4

Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor definite pe $\mathbb{N}^*$ cu valori în $\{-1, 1\}$. Pentru fiecare $f \in \mathcal{F}$ definim şirul $(a_n(f))_{n\geq 1}$ prin $a_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k!}$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că $(a_n(f))_{n\geq 1}$ este convergent, pentru orice $f \in \mathcal{F}$. Notăm $L(f)$ limita sa.
b) Arătaţi că pentru orice $f, g \in \mathcal{F}$ cu $f \neq g$ avem $L(f) \neq L(g)$.
c) Arătaţi că $L(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru orice $f \in \mathcal{F}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

a) Şirul $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător ş mărginit, deci convergent. Într-adevăr $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < 2.$

Dacă $f \neq 1$, fie $A = \{k \in \mathbb{N}^* | f(k) = 1\}$ şi $B = \{k \in \mathbb{N}^* | f(k) = -1\}$. Atunci $a_n(f) = \sum_{k=1, k\in A}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1, k\in B}^{n} \frac{1}{k!}$. Însă, din aceleaşi considerente, cele două şiruri care apar în diferenţă sunt convergente, deci şi şirul diferenţă este.

b) Dacă $f \neq g$, fie k cel mai mic număr natural nenul pentru care $f(k) \neq g(k)$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $f(k) = 1$ şi $g(k) = -1$. Atunci, pentru $n > k$ avem $a_n(f) - a_n(g) = \frac{2}{k!} + \sum_{p=k+1}^{n} \frac{f(p) - g(p)}{p!} > \frac{2}{k!} - 2\sum_{p=k+1}^{n} \frac{1}{p!}$.

Dar $\sum_{p=k+1}^{n} \frac{1}{p!} = \frac{1}{(k+1)!}\left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \dots\right) <$
$\frac{1}{(k+1)!}\left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$
$\to \frac{2}{(k+1)!}\left(1 + \frac{2}{k+2}\right)$. Deducem că $\lim_{n\to\infty} a_n(f) - a_n(g) > \frac{2}{k!} - \frac{2}{(k+1)!} \cdot \frac{k+4}{k+2} > 0.$

c) Presupunem că avem $L(f) = \frac{p}{q}$, unde $(p, q) = 1$. Pentru $n > q$ avem $q! \cdot a_n(f) = q! \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} + q! \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!} = m + q! \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!}$, unde $m \in \mathbb{Z}$. Atunci deducem că limita

$\lim\limits_{n\to\infty} q! \sum\limits_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!}$ este întreagă. Se arată însă că $0 < \frac{q}{(q+1)^2} < q! \sum\limits_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1$, contradicţie.