Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 13-a, Ianuarie 2024

Subiecte - Clasa a 12-a

Problema 1

Determinaţi funcţiile continue $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $x \in [0, \infty)$, are loc relaţia

$$F(x) + \{f(x)\} = 0.$$

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Din ipoteză rezultă că avem $F(x) + f(x) = [f(x)] \in \mathbb{Z}$, iar cum $F + f$ este o funcţie continuă, deducem că $F + f$ este constantă, adică $F(x) + f(x) = k \in \mathbb{Z}$.

Atunci, $e^x F(x) + e^x f(x) = k \cdot e^x$ sau $(e^x F(x) - k \cdot e^x)' = 0$. Atunci $e^x F(x) = k \cdot e^x + a$, deci $F(x) = k + a \cdot e^{-x}$ şi atunci $f(x) = F'(x) = -a \cdot e^{-x}$. Pentru $x = 0$, obţinem $k = 0$, deci $F(x) = a \cdot e^{-x}$.

Avem $F(x) = -\{f(x)\} \in (-1, 0]$, deci $a \cdot e^{-x} \in (-1, 0]$, pentru orice $x \geq 0$. Atunci $a \in (-1, 0]$, deci $f(x) = be^{-x}$, cu $b = -a \in [0, 1)$. Observăm că aceste funcţii verifică.

Problema 2

Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitivele $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $a < b$, există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{F(a) - F(b)}{a - b} = g(c); \quad \frac{G(a) - G(b)}{a - b} = f(c).$$

a) Dacă f este continuă, arătaţi că $f = g$.
b) Arătaţi că pentru orice $a < b$, există $c \in (a, b)$ pentru care $f(c) = g(c)$.

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie

a) Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat. Conform relaţiei din ipoteză, există şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ pentru care $\frac{G(x+\frac{1}{n})-G(x)}{\frac{1}{n}} = f(x_n)$, unde $x_n \in (x, x + \frac{1}{n})$. Întrucât funcţia G este derivabilă, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G(x+\frac{1}{n})-G(x)}{\frac{1}{n}} = G'(x) = g(x)$, iar cum f este continuă, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(x)$. Deducem că $f(x) = g(x)$.

b) Fie $a < b$ aleatorii. Considerăm funcţia $h = f - g$. Atunci functia $H = F - G$ este o primitivă a acesteia întrucât $h = H' = F' - G' = f - g$. Din condiţiile problemei deducem că există $c \in (a, b)$ pentru care $\frac{H(a)-H(b)}{a-b} = -h(c)$.

Dar, din teorema lui Lagrange, există $d \in (a, b)$ pentru care $\frac{H(a)-H(b)}{a-b} = h(d)$. Atunci, avem $-h(c) = h(d)$, deci $h(c)h(d) = -h(c)^2 \leq 0$. Dacă $h(c) = 0$, problema este rezolvată. Altfel, $c \neq d$ şi $h(c)h(d) < 0$.

Cum funcţia h admite primitive, aceasta are proprietatea valorilor intermediare, deci există $e \in (c, d) \subset (a, b)$ cu $h(e) = 0$.

Problema 3

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H \subset G$ un subgrup propriu finit al său cu proprietatea că pentru orice $a \in G \setminus H$, mulţimea $C(a) = \{x \in G | a \cdot x = x \cdot a\}$ are exact două elemente. Arătaţi că G este finit şi are $4n + 2$ elemente, pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Opincariu, Brad

Soluţie

Dacă $a \in G \setminus H$, observăm că $\{e, a\} \subset C(a)$, deci $C(a) = \{e, a\}$. Cum $a^2 \in C(a)$, avem $a^2 = e$. Fie $a, b \in G \setminus H, a \neq b$. Dacă $ab \in G \setminus H$, avem $a^2b^2 = e = (ab)^2$, deci $ab = ba$, de unde deducem că $b \in C(a)$, fals. Atunci $ab \in H$, pentru orice $a, b \in G \setminus H, a \neq b$. Fixăm $a \in G \setminus H$. Funcţia $f : G \setminus H \to H$ definită prin $f(x) = ax$ este atunci bine definită şi injectivă, deci $|G \setminus H| \leq |H|$, adică $|G| \leq 2|H|$, de unde deducem că G este finit.

Cum H este subgrup propriu al lui G, $|H|$ divide $|G|$ şi $|H| \neq |G|$. Atunci $|H| \leq \frac{|G|}{2}$, deci $|G| = 2|H|$. Presupunem că $|H|$ este par. Atunci, există $b \in H$ cu $ord(b) = 2$, adică $b \neq e$ şi $b^2 = e$. Atunci, dacă luăm $a \in G \setminus H$, avem $ab \in G \setminus H$ (altfel $ab, b \in H$ ar implica $a \in H$). Deducem că $a^2b^2 = e = (ab)^2$, deci $ab = ba$, adică $b \in C(a)$, fals. Aşadar $|H|$ este impar, de unde concluzia.

Problema 4

Fie M o mulţime nevidă şi finită şi $\mathcal{P}$ mulţimea părţilor acesteia ($\mathcal{P} = \{A | A \subseteq M\}$). Determinaţi operaţiile $* : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ care induc pe $\mathcal{P}$ o structură de grup şi care verifică $A * B \subseteq A \cup B$, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie

Observăm că $\emptyset * \emptyset \subseteq \emptyset$, deci $\emptyset * \emptyset = \emptyset$, de unde deducem că $\emptyset$ este elementul neutru al grupului. Fie $A_1 \subseteq M$ o mulţime de cardinal 1. Atunci $A_1 * A_1 \subseteq A_1$, adică $A_1 * A_1 \in \{\emptyset, A_1\}$. Dacă $A_1 * A_1 = A_1$, ne rezultă că $A_1 = \emptyset$, fals. Aşadar, $A_1 * A_1 = \emptyset$.

Arătăm prin inducţie după $|A| \in \{1, 2, \dots, |M|\}$ că $A * A = \emptyset$ (1). Cazul $|A| = 1$ este tratat mai sus. Prespunem că $A * A = \emptyset$, pentru orice $A \in \mathcal{P}$ cu $|A| \leq k < |M|$. Fie $B \in \mathcal{P}$ cu $|B| = k + 1$. Pentru orice $C \subseteq B$ avem $B * C \subseteq B \cup C = B$. Funcţia $f : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ definită prin $f(X) = B * X$ este atunci corect definită şi injectivă, deci este bijectivă. Fie B_0 cu proprietatea că $f(B_0) = \emptyset$. Atunci $B * B_0 = \emptyset$. Dacă $B_0 \neq B$, atunci $|B_0| \leq k$, deci $B_0 * B_0 = \emptyset = B * B_0$, deci $B = B_0$, fals. Aşadar $B_0 = B$ şi deducem că $B * B = \emptyset$.

Fie $A \in \mathcal{P} \setminus \{M\}$ fixat. Arătăm prin inducţie după $|B| \in \{1, 2, \dots, |M| - |A|\}$ că dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $A * B = A \cup B$ (2). Pentru $|B| = 1$, avem $B = \{x\}$, unde $x \notin A$. Fie $C = A * \{x\} \subseteq A \cup \{x\}$. Atunci $A =^{(1)} C * \{x\} \subseteq C \cup \{x\}$, dar $x \notin A$, deci $A \subseteq C \subseteq A \cup \{x\}$. Dacă $C = A$, atunci $A * \{x\} = A * \emptyset$, deci $\{x\} = \emptyset$, fals. Atunci $C = A \cup \{x\}$. Presupunem mai departe că dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $A * B = A \cup B$, unde $|B| = k$. Fie $C \in \mathcal{P}$ cu $A \cap C = \emptyset$ şi $|C| = k + 1$. Atunci $C = C_0 \cup \{y\}$, unde $y \notin A$. Din ipoteza de inducţie avem $A * C_0 = A \cup C_0$. Mai mult, avem $A * C = A * (C_0 \cup \{y\}) = A * (C_0 * \{y\}) = A * C_0 * \{y\} = (A \cup C_0) \cup \{y\} = A \cup C$.

În final, pentru orice mulţimi $A, B \in \mathcal{P}$ avem $A = X \cup Y$ şi $B = X \cup Z$, unde $X = A \cap B$, $Y = A \setminus X$ şi $Z = B \setminus X$. Atunci X, Y, Z sunt disjuncte. Avem $A * B = (X \cup Y) * (X \cup Z) =^{(2)} Y * X * X * Z =^{(1)} Y * Z = Y \cup Z = (A \cap B) \setminus (A \cup B) = A \Delta B$.