CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „ARGUMENT”

Baia Mare, 13 ianuarie 2024

CLASA a VI-a

La problemele 1-8, scrieţi pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Suma divizorilor proprii ai numărului 60 este:

a) 168 b) 167 c) 107 d) 61

(5p) **2.** Suma cifrelor celui mai mic multiplu comun al numerelor 22, 65 și 143 este:

a) 12 b) 8 c) 13 d) 17

(5p) **3.** Cel mai mare divizor comun al numerelor $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 19\cdot 20$ și $b=4^3\cdot 10^5$ este:

a) $2^{11}\cdot 5^5$ b) $2^{10}\cdot 5^4$ c) $2^{10}\cdot 5^5$ d) $2^{11}\cdot 5^4$

(5p) **4.** Dacă a și b sunt numere naturale astfel încât $a\cdot b=8820$ și $[a,b]=210$, atunci $a+b$ este egal cu:

a) 252 b) 5 c) 42 d) 210

(5p) **5.** Numărul de numere naturale de două cifre care au exact doi divizori naturali este egal cu:

a) 25 b) 21 c) 19 d) 26

(5p) **6.** Complementul suplementului unghiului de măsură $112^\circ 30'$ are măsura egală cu:

a) $22^\circ 30'$ b) $77^\circ 30'$ c) $67^\circ 30'$ d) $88^\circ 30'$

(5p) **7.** Punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine. Dacă $AB=3cm$, $BC=1cm$ și $AD=2AC$, atunci suma lungimilor tuturor segmentelor determinate de cele patru puncte este egală cu:

a) 8 b) 32 c) 16 d) 25

(5p) **8.** Numărul maxim de unghiuri în jurul unui punct având măsurile numere naturale nenule,distincte și divizibile cu 3 este:

a) 15 b) 16 c) 10 d) 9

La problemele 9 şi 10 redactaţi rezolvările complete.

9. Fie numărul $A=10^{n+2}+10^n$, unde n este număr natural nenul.

(10p) a) Să se afle valorile cifrei a știind că numărul $A-a$ este divizibil cu 3.

(10p) b) Să se afle numărul de numere de forma $\overline{xy}, x\neq 0$, știind că numărul $A-\overline{xy}$ este divizibil cu 6.

(5p) c) Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât A+2124 este divizibil cu 7.

(25p) **10.** Se dau unghiurile AOB și BOC astfel încât $m(\sphericalangle AOB)=5\cdot m(\sphericalangle BOC)$. Se știe că bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 54°.

a) Calculați măsurile unghiurilor AOB , BOC , și AOC.

b) Dacă $[OB'$ este semidreapta opusă semidreptei $[OB$, atunci calculați $m(\sphericalangle AOB')$.

Notă: Timpul de lucru este 2 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Succes!

Barem clasa a VI-a

1	2	3	4	5	6	7	8
c	b	d	a	b	a	d	**a**

3. a) Avem $A=\underset{n+2\,cifre}{100...0}+\underset{n\,cifre}{100...0}=10100\underset{n\,cifre}{...0}$ 2p

Notăm cu S(B) suma cifrelor numărului B.

Dacă a=0, atunci $A-0=10100\underset{n\,cifre}{...0}\Rightarrow S(A)=2\Rightarrow$ A nu este divizibil cu 3.......2p

Dacă a este cifră nenulă, atunci

$A-a=100\underset{n-1\,cifre}{99..9}b$, unde b=10-a este cifră...1p

Atunci

$3|(A-a)\Leftrightarrow 3|S(A-a)\Leftrightarrow 3|1+9(n-1)+b\Leftrightarrow 3|(b+1)\Leftrightarrow b\in\{2,5,8\}$ 3p

Deci $a\in\{2,5,8\}$ 2p

b) Se știe că A și suma cifrelor lui A dau același rest la împărțirea prin 3..........2p

Cum $A=\underset{n+2\,cifre}{100...0}+\underset{n\,cifre}{100...0}=10100\underset{n\,cifre}{...0}\Rightarrow S(A)=2\Rightarrow A=M_3+2$ 1p

$3|\left(A-\overline{xy}\right)\Leftrightarrow \overline{xy}=M_3+2\Leftrightarrow \overline{xy}\in\{3\cdot3+2,3\cdot4+2,3\cdot5+2,...,3\cdot32+2,\ \}$

Deci există 32-3+1=30 de numere $\overline{xy}$ astfel încât $3|\left(A-\overline{xy}\right)$............................3p.

Obs. că $6|\left(A-\overline{xy}\right)\Leftrightarrow 3|\left(A-\overline{xy}\right)\ si\ 2|\left(A-\overline{xy}\right)$...1p

$2|\left(A-\overline{xy}\right)\overset{A\,par}{\Leftrightarrow}2|\overline{xy}\Leftrightarrow\overline{xy}=3p+2,\ p\in\{4,6,8,...,30,32\}$, deci sunt 15 numere A ca în enunț...3p

c) Avem $7^4=2401$.

$A+2124=10^{n+2}+10^n+2124=10^n\cdot\left(10^2+1\right)+2124$

Luăm $n=3k,k\in\mathbb{N}$, deci

$A=10^{3k}\cdot101+2124=(1001-1)^k\cdot101+2124\overset{k=2p+1}{=}(M_{1001}-1)\cdot101+2124=$

$=M_{1001}-2023\overset{1001=7\cdot11\cdot13}{=}M_7-7\cdot289=M_7$

Atunci numerele $n=3\cdot(2p+1)=6p+3,\ \forall p\in\mathbb{N}$ sunt soluții................5p

4. Trebuie analizate două cazuri:

Cazul I: $\left(OB\subset Int(\sphericalangle AOC\right)$

a) Fie $m(\sphericalangle BOC)=x$, deci $m(\sphericalangle AOB)=5\cdot x$

Fie $[OE$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$ și $[OF$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$

Atunci $\sphericalangle EOF=\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}=3x\Rightarrow 3x=54^0\Rightarrow x=18^0$ 5p

Deci $\sphericalangle AOB=90^0,\sphericalangle BOC=18^0,\sphericalangle AOC=90^0+18^0=108^0$ 5p

b) $\sphericalangle AOB'=\sphericalangle BOB'-\sphericalangle AOB=180^0-90^0=90^0$......................................3p

Cazul II: $\left(OC\subset Int(\sphericalangle AOB\right)$

a) Fie $\sphericalangle BOC=y\Rightarrow\sphericalangle AOB=5y\Rightarrow\sphericalangle AOC=4y$

Fie $[OM$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și $[ON$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$.

Atunci $\sphericalangle NOM=\frac{5y}{2}-\frac{y}{2}=2y\Rightarrow 2y=54^0\Rightarrow y=27^0$ 5p

Deci $\sphericalangle AOB=135^0,\sphericalangle BOC=27^0,\sphericalangle AOC=108^0$ 5p

b) $\sphericalangle AOB'=180^0-\sphericalangle AOB=180^0-135^0=45^0$ 2p