CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVIII-A
11.05.2024
Clasa a VI-a
BAREM

Subiectul 1

a) Determinați perechile de numere întregi (x, y) pentru care are loc egalitatea

$$2xy - 3x - 4y + 9 = 0$$

b) Pentru fiecare număr natural $n \in \mathbb{N}$ se definește suma $E(n) = (-1)^{n+1} \cdot 2n + (-1)^n \cdot 3n$. Determinați valoarea sumei

$$S = E(1) + E(2) + E(3) + \cdots + E(2023) + \frac{2024}{2}.$$

Soluție

a) Egalitatea $2xy - 3x - 4y + 9 = 0$ este echivalentă cu $2y(x-2) = 3(x-3)$ **(1 punct)**

Cum numerele $x-2$ și $x-3$ sunt relativ prime între ele, se deduce că $x - 2 \mid 3$
Avem $x - 2 \in \{\pm 1, \pm 3\}$ **(1 punct)**
Pentru $x - 2 = -3$, se obține $2y \cdot (-3) = 3 \cdot (-4)$. Rezultă $(x, y) = (-1, 2)$ **(0,25 puncte)**

Pentru $x - 2 = -1$, se obține $2y \cdot (-1) = 3 \cdot (-2)$. Rezultă $(x, y) = (1,3)$ **(0,25 puncte)**

Pentru $x - 2 = 1$, se obține $2y \cdot 1 = 3 \cdot 0$. Rezultă $(x, y) = (3,0)$ **(0,25 puncte)**

Pentru $x - 2 = 3$, se obține $2y \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Rezultă $(x, y) = (5, 1)$ **(0,25 puncte)**

Finalizare $(x, y) \in \{(-1,2), (1,3), (3,0), (5,1)\}$

b) Dacă n este impar, atunci $n + 1$ este par și

$$E(n) + E(n+1) = 2n - 3n - 2(n+1) + 3(n+1) = 1$$ **(1 punct)**

Se obține

$$E(1) + E(2) + E(3) + \cdots + E(2022) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1011}$$ **(1 punct)**

$$E(2023) = 2 \cdot 2023 + (-1) \cdot 3 \cdot 2023 = -2023$$ **(1 punct)**

În concluzie, $S = 1011 + (-2023) + 1012 = 0.$ **(1 punct)**

Colegiul Național ”Dragoș Vodă”
Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0262.311.958 /Fax 0262.318.509
Email: cndv.sighet@gmail.com, Web: www.cndv.ro

Subiectul 2.

Aflați numerele naturale nenule a, b, c cu proprietatea că

$$\frac{a+1}{a+2}=\frac{3b}{b+3}=\frac{5a+2b+c}{a+3b+5c}$$

Andrei Horvat-Marc

Soluție

Cum $\frac{a+1}{a+2}<1$ se obține $\frac{3b}{b+3}<1$ deci $3b<b+3 \Leftrightarrow b<\frac{3}{2}$

Se obține $b=1$. **(2 punct)**

Din $\frac{a+1}{a+2}=\frac{3}{4}$ se obține $a=2$ **(2 punct)**

Din $\frac{3}{4}=\frac{5a+2b+c}{a+3b+5c}$, se obține

$$\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2+2\cdot 1+c}{2+3\cdot 1+5c} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{12+c}{5+5c} \Rightarrow c=3.$$

(2 punct)

Finalizare, soluție $a=2$, $b=1$ și $c=3$. **(1 punct)**

Subiectul 3.

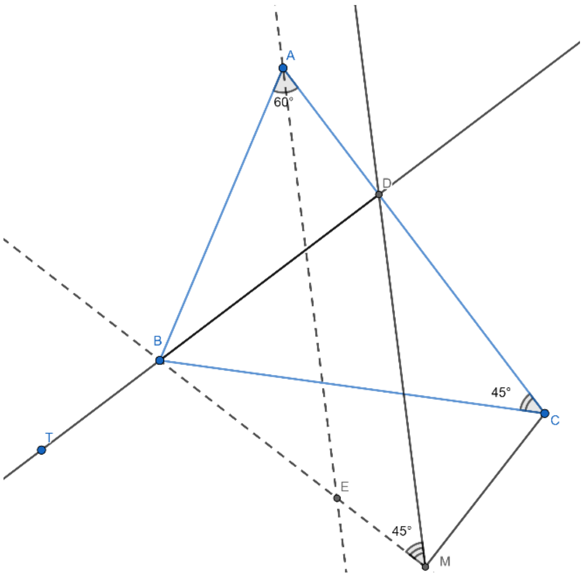
Fie triunghiul ABC, cu $\measuredangle BAC = 60^\circ$ și $\measuredangle BCA = 45^\circ$. În triunghiul ΔABD, cu $D \in AC$ astfel încât $BD \perp AC$, bisectoarea interioară unghiului BAD se intersectează cu bisectoarea exterioară unghiului ABD în punctul E. Pe dreapta BE se consideră punctul M pentru care $CM \perp BE$.

a) Arătați că semidreapta $[MD$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BMC$.

b) Determinați măsura unghiului $\measuredangle MDE$.

Gazeta Matematică 5/2023

Soluție și barem



a) Se arată că $\measuredangle DBC = 45^\circ$, deci $BD = DC$ **(1 punct)**

Fie triunghiul echilateral CDP, cu B, P de aceeași parte a dreptei AC.

Din ΔBDP este un triunghi isoscel,

cu $BD = DP$ și $\measuredangle BDP = 30^\circ$ rezultă $\measuredangle DBP = 75^\circ$

Cum $\measuredangle DBE = 75^\circ$, se deduce că

punctele B, P, M sunt coliniare **(1 punct)**

Cum $\measuredangle CPM = 45^\circ = \measuredangle PCM$ rezultă $CM = MP$ **(1 punct)**

Se compară triunghiurile ΔDPM și ΔDCM

$$\begin{cases} DP = DC \\ DM = DM \\ PM = CM \end{cases} \xRightarrow{L.L.L.} \Delta DPM \equiv \Delta DCM$$

Atunci $\measuredangle EMD = \measuredangle CMD$,

deci $[MD$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle BMC$ **(1 punct)**

b) Cum $\Delta DPM \equiv \Delta DCM$, rezultă $\measuredangle MDP = \measuredangle MDC$, cu $\measuredangle PDC = 60^\circ$, deci $\measuredangle CDM = 30^\circ$ **(1 punct)**

Cum $[BE$ și $[AE$ sunt bisectoarea, rezultă $[DE$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\measuredangle ADB$.

Atunci $\measuredangle CDE = 45^\circ$ **(1 punct)**

Se obține $\measuredangle MDE = \measuredangle CDE - \measuredangle CDM = 15^\circ$. **(1 punct)**

Subiecte selectate și propuse de către
Prof. LOREDANA BEDEOAN

Colegiul Național ”Dragoș Vodă”
Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0262.311.958 /Fax 0262.318.509
Email: cndv.sighet@gmail.com, Web: www.cndv.ro