CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVIII-A
11.05.2024

Clasa a VII-a

Barem

Subiectul 1.
Determinați diferența $A - x$ unde

$$A = \frac{0{,}2 + 0{,}4 + \cdots + 1{,}6 + 1{,}8}{\sqrt{32 - 10\sqrt{7}} + \sqrt{23 + 8\sqrt{7}}},$$

iar x este numărul real pentru care are loc egalitatea

$$\frac{x + 2011}{2012} + \frac{x + 2012}{2013} + \cdots + \frac{x + 2023}{2024} = 13.$$

Soluție și barem

Avem $\sqrt{32 - 10\sqrt{7}} = 5 - \sqrt{7}$ și $\sqrt{23 + 8\sqrt{7}} = 4 + \sqrt{7}$. **(2 punct)**
Atunci

$$A = \frac{0{,}2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 8 + 9)}{5 - \sqrt{7} + 4 + \sqrt{7}}$$

$$A = 1$$ **(1 punct)**

Avem

$$\frac{x + 2011}{2012} - 1 + \frac{x + 2012}{2013} - 1 + \cdots + \frac{x + 2023}{2024} - 1 = 0$$

$$\frac{x - 1}{2012} + \frac{x - 1}{2013} + \cdots + \frac{x - 1}{2024} = 0$$

$$(x - 1)\left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \cdots + \frac{1}{2024}\right) = 0$$

$$x = 1$$ **(3 puncte)**

Se obține $A - x = 1 - 1 = 0$ **(1 punct)**

Subiectul 2. Fie numerele reale, pozitive a și b. Demonstrați că

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2(a+b)}{a^2+b^2}\geq\frac{8}{a+b}$$

(G.M. 2/2024, E: 16821)

Soluție și barem

Au loc echivalențele

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2(a+b)}{a^2+b^2}\geq\frac{8}{a+b}$$

$$\frac{2(a+b)}{a^2+b^2}\geq\frac{8}{a+b}-\frac{a+b}{ab}=\frac{6ab-(a^2+b^2)}{ab(a+b)}$$

$$2ab(a+b)^2\geq(a^2+b^2)\big(6ab-(a^2+b^2)\big)$$

$$(a^2+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2\geq 0$$

$$(a^2+b^2-2ab)^2\geq 0$$

$$(a-b)^4\geq 0$$

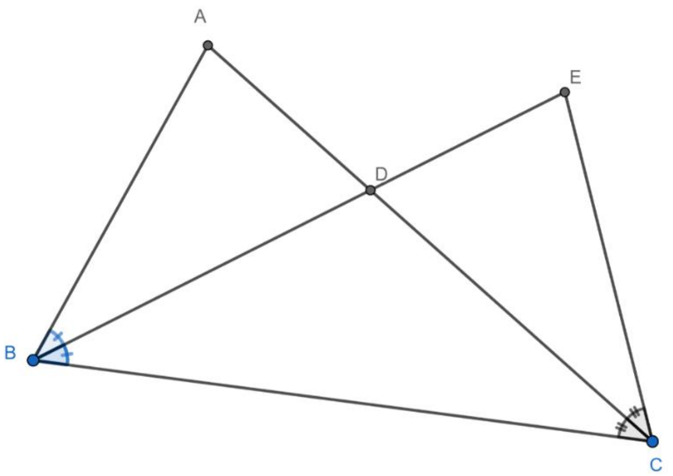
(6 puncte)

Cum ultima inegalitate are loc pentru orice numere reale a și b, inegalitatea inițială are loc
Cazul de egalitate are loc pentru $a=b$. **(1 punct)**

Subiectul 3. Fie triunghiul ABC, cu $\sphericalangle C\leq\sphericalangle B\leq 90°$ și punctul E astfel încât semidreapta $(BE$ ete bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, iar semidreapta $(CA$ ete bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCE$, cu $AB=CE$ și $AC\cap BE=\{D\}$.

a) Determinați valoarea raportului dintre aria patrulaterului $ABCE$ și aria triunghiului ABD.
b) Stabiliți natura patrulaterului $ABCE$ în cazul în care $\sphericalangle ACB=45°$.

Andrei Horvat-Marc



Soluție și barem

în ΔABC, cu $(BD$ bisectoare, se obține

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC} \quad (1)$$

în ΔBCE, cu $(CD$ bisectoare, se obține

$$\frac{ED}{BD}=\frac{EC}{BC} \quad (2)$$

Din (1) și (2), ținând cont de $AB=CE$, rezultă

$$\frac{AD}{DC}=\frac{ED}{DB} \quad (3)$$

(1,5 puncte)

Colegiul Național ”Dragoș Vodă”
Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0262.311.958 /Fax 0262.318.509
Email: cndv.sighet@gmail.com, Web: www.cndv.ro

Patrulaterul $ABCE$ este un trapez isoscel.

(2,5 puncte)

a) Dacă $\frac{AD}{DC} = k$, atunci

$$\frac{\mathcal{A}_{ABCE}}{\mathcal{A}_{\Delta ABD}} = 2 + k + \frac{1}{k} \geq 4.$$

(1 punct)

b) Cum patrulaterul $ABCE$ este trapez isoscel, cu $\sphericalangle ACB = 45^\circ = x$, avem că $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCE = 90^\circ$, deci unghiurile de la baza trapezului sunt unghiuri drepte, ceea ce implică faptul că patrulaterul $ABCE$ este un dreptunghi.

Cum ΔBDC este un triunghi isoscel, cu unghiurile de la bază $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = 45^\circ$, rezultă că $BD \perp CD$, deci patrulaterul $ABCE$ este un dreptunghi cu diagonalele perpendiculare, ceea ce implică

patrulaterul $ABCE$ este un pătrat.

(2 puncte)

Subiecte selectate și propuse de către
Prof. MIHU AMALIA-MIRELA