CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIŢIA A XXVIII-A
11.05.2024
Clasa a VIII-a
BAREM

Subiectul 1

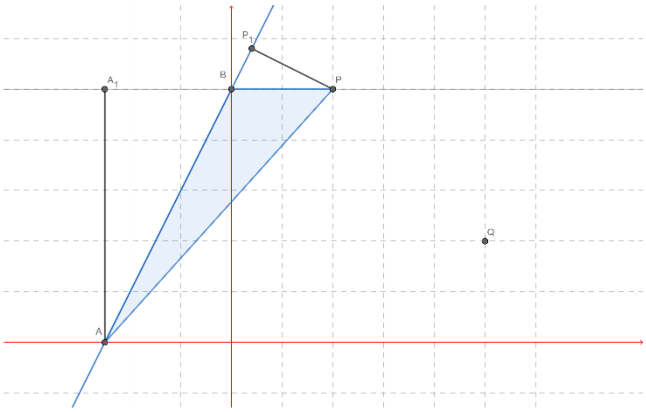
În sistemul de axe ortogonale xOy considerăm punctele $P(a,b)$ şi $Q(b,a)$ şi notăm cu G_f reprezentarea geometrică a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq b$, cu $b>a>0$ numere reale.

a) Demonstraţi că distanţa de la P la G_f nu depinde de b.
b) Calculaţi distanţa de la Q la G_f.

Gazeta Matematică 3/2024 (prelucrare)

Soluţie

a) Fie $A_1 = pr_{BP}A$ şi $P_1 = pr_{AB}P$, deci $d(A,BP)=AA_1$, respectiv $d(P,AB)=PP_1$.



$G_f \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a},0\right)$, iar $G_f\cap Oy = B(0,b)$. **(1 punct)**

Se obţine $AA_1=b$, $BP=a$, $AB=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{1+a^2}$ **(1 punct)**

Avem

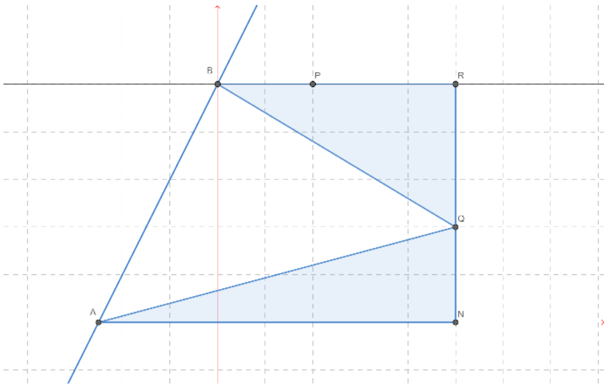
$$\mathcal{A}_{\Delta PAB}=\frac{AA_1\cdot BP}{2}=\frac{PP_1\cdot AB}{2}$$

deci

$$d(P,AB)=PP_1=\frac{AA_1\cdot BP}{AB}=\frac{a\cdot b}{\frac{b}{a}\cdot\sqrt{1+a^2}}=\frac{a^2\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}$$

(1 punct)

ceea ce arată că distanţa de la punctul P la G_f nu depinde de b.



b) Fie $N = pr_{Ox}Q$, deci $N(b,0)$ și punctul $R(b,b)$.

$$A_{\Delta QAB} = \frac{d(Q,AB)\cdot AB}{2}$$
$$= A_{BRNA} - A_{\Delta BRQ} - A_{\Delta ANQ}$$
$$= \frac{b(ab+b-a)}{2a}$$

(2 puncte)

Se obține

$$d(Q,AB) = \frac{(ab+b-a)\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}.$$

(2 puncte)

În concluzie, distanța de la Q la G_f este $\frac{(ab+b-a)\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}$.

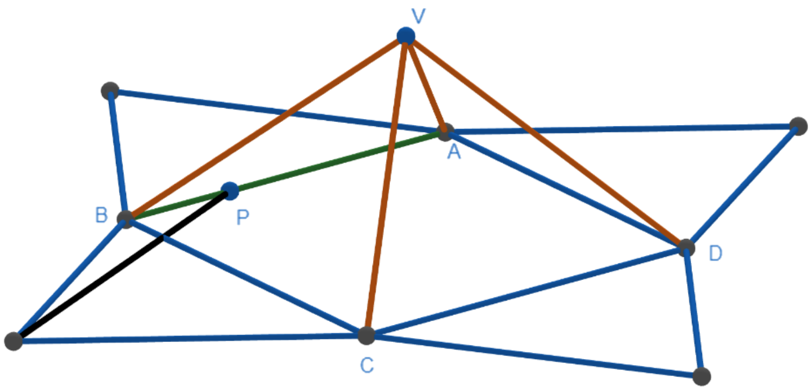
Subiectul 2.

Fie $VABCD$ o piramida patrulateră, cu muchia bazei $AB = 16\sqrt{2}\ cm$ și muchia laterală $VA = 20\ cm$.

a) Arătați că există $n \in \mathbb{N}$ pentru care $V = 2^n$, unde V reprezintă volumul piramidei $VABCD$.

b) Punctul P se află pe muchia AB, astfel încât $BP = 2\sqrt{17}\ cm$, iar punctul N se află pe muchia BC astfel încât suma $VN + NP$ este minimă. Demonstrați că $NC = 5NB$.

Soluție



a) Înălțimea piramidei este $h = 12$ cm. **(1 punct)**

Volumul piramidei $VABCD$ este

$V = \frac{A_b\cdot h}{3} = 2048cm^3$. **(1 punct)**

Cum $2048 = 2^{11}$ se obține $n = 11$ **(1 punct)**

b) Suma $VN + NP$ este minimă atunci când punctele V, N și P sunt coliniare pe desfășurare. **(1 punct)**

Fie M mijlocul segmentului BC. Din $\Delta PBN \sim \Delta VMN$ obținem că $\frac{BN}{NM} = \frac{BP}{VM} = \frac{2\sqrt{17}}{4\sqrt{17}} = \frac{1}{2}$ **(2 punct)**

Atunci $BN = \frac{1}{2}NM$, de unde $NC = 5BN$. **(2 punct)**

Colegiul Național ”Dragoș Vodă”
Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0262.311.958 /Fax 0262.318.509
Email: cndv.sighet@gmail.com, Web: www.cndv.ro

Subiectul 3.

Determinați valoarea maximă a produsului $P = xyz$, unde x, y, z sunt numere reale strict pozitive, cu

$x + y + z = 510$ și $z \geq 506$.

Andrei Horvat-Marc

Soluție și barem

Din $z \geq 506$, rezultă $506 + y \leq z + y \leq 510$, deci $y \leq 4$. **(1 punct)**

Cum $506 - z \leq 0$ și $506 - y \geq 0$, avem

$0 \geq (506 - y)(506 - z) = 506^2 - 506(y + z) + yz$, deci $yz \leq 506(y + z - 506)$ **(1 punct)**

Atunci $P = xyz \leq 506 \cdot x \cdot (y + z - 506)$. **(1 punct)**

Pentru numerele pozitive x și $y + z - 506$, se aplică inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică. Se obține

$$x \cdot (y + z - 506) \leq \frac{(x + y + z - 506)^2}{4} = \frac{4^2}{4} = 4$$

(2 puncte)

deci $P = xyz \leq 506 \cdot 4 = 2024$, cu egalitate pentru $x = y + z - 506$. **(1 punct)**

Cum pentru $x = y = 2$ și $z = 506$ avem $P = xyz = 2 \cdot 2 \cdot 506 = 2024$,

deduce că pentru x, y, z numere reale strict pozitive, cu $x + y + z = 510$ și $z \geq 506$,

valoarea maximă a produsului xyz este 2024. **(1 punct)**

Subiecte selectate și propuse de către

Prof. POP OVIDIU-FLORIN

Colegiul Național ”Dragoș Vodă”
Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0262.311.958 /Fax 0262.318.509
Email: cndv.sighet@gmail.com, Web: www.cndv.ro