CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA"
EDIŢIA A XXVIII-A
11.05.2024

Clasa a IX-a
BAREM

Subiectul 1

Fie x_{n-1}, x_n şi x_{n+1} termeni consecutivi nenuli ai unei progresii geometrice cu termeni strict pozitivi şi raţia nenulă, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că inegalitatea

$$\frac{x_{n-1}\cdot x_n}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n\cdot x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}+\frac{x_{n+1}\cdot x_{n-1}}{x_{n+1}+x_{n-1}}\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{x_{n-1}\cdot x_n+x_n\cdot x_{n+1}+x_{n+1}\cdot x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}$$

are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie.

Dacă $x_{n-1}=a>0$, $x_n=a\cdot q>0$ şi $x_{n+1}=a\cdot q^2>0$, inegalitatea se scrie în forma echivalentă

$$\frac{a^2q}{a(1+q)}+\frac{a^2q^3}{aq(1+q)}+\frac{a^2q^2}{a(1+q^2)}\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2q(1+q^2+q)}{a(1+q+q^2)}$$

(3 puncte)

ceea ce revine la

$$\frac{1}{1+q}+\frac{q}{1+q}+\frac{q}{1+q^2}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1+q+q^2}{1+q^2}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow(q-1)^2\geq 0.$$

(3 puncte)

Cazul de egalitate are loc pentru $q=1$, adică pentru $x_{n-1}=x_n=x_{n+1}$. **(1 punct)**

Subiectul 2.

Fie triunghiul ABC cu $AB=c$, $BC=a$ şi $CA=b$, unde $a,b,c\in(0,\infty)$. Fie T centrul de greutate al triunghiului MNT, unde $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CA)$, cu $AM=BN=CP$. Arătaţi că dacă are loc egalitatea $c\cdot\overrightarrow{AT}+a\cdot\overrightarrow{BT}+b\cdot\overrightarrow{CT}=\vec{0}$, atunci ΔABC este triunghi echilateral.

Soluţie

Cum T centrul de greutate al triunghiului MNT, avem

$$\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{TP}=\vec{0}$$ **(1p)**

Fie $AM=BN=CP=x>0$ şi $k_1,k_2,k_3\in(0,\infty)$ pentru care $\overrightarrow{AM}=k_1\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=k_2\cdot\overrightarrow{BC}$, respectiv $\overrightarrow{CP}=k_3\cdot\overrightarrow{CA}$. Atunci $k_1=\frac{x}{c}$, $k_2=\frac{x}{a}$, $k_3=\frac{x}{b}$ şi

$$c\cdot\overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{AB},\ \ a\cdot\overrightarrow{BN}=x\cdot\overrightarrow{BC},\ \ \ b\cdot\overrightarrow{CP}=x\cdot\overrightarrow{CA}$$ **(2p)**

Avem

$$c \cdot \overrightarrow{AT} + a \cdot \overrightarrow{BT} + b \cdot \overrightarrow{CT} = \vec{0} \Leftrightarrow c\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MT}\right) + a\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NT}\right) + b\left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PT}\right) = \vec{0}$$

$$\left(c \cdot \overrightarrow{AM} + a \cdot \overrightarrow{BN} + b \cdot \overrightarrow{CP}\right) + \left(c \cdot \overrightarrow{MT} + a \cdot \overrightarrow{NT} + b \cdot \overrightarrow{PT}\right) = \vec{0}$$

Se obține

$$x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + c \cdot \overrightarrow{MT} + a \cdot \overrightarrow{NT} + b \cdot \left(\overrightarrow{TM} + \overrightarrow{TN}\right) = \vec{0}$$ **(2p)**

Deoarece $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, rezultă

$$(c - b) \cdot \overrightarrow{MT} + (a - b) \cdot \overrightarrow{NT} = \vec{0}$$ **(1p)**

Faptul că vectorii $\overrightarrow{MT}$ și $\overrightarrow{NT}$ sunt necoliniari implică $c - b = a - b = 0$, deci $a = b = c$,

deci ΔABC este triunghi echilateral. **(1p)**

Subiectul 3.

Fie n un număr natural nenul și $P_n(x) = \sqrt{x^2 - nx} + \sqrt{x^2 - n^2} + \sqrt{x^2 + nx} - 3x,\ x \geq n$.

Pentru $x \in \left[n^2 + \frac{1}{3}, \infty\right)$, determinați $[P_n(x)]$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Vasile Giurgi

Soluție

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz avem

$$\left(\sqrt{x^2 - nx} + \sqrt{x^2 - n^2} + \sqrt{x^2 + nx}\right)^2 < (x - n + x + n + x)(x + x - n + x) = 9x^2.$$

De aici rezultă că $P_n(x) < 0, \forall x \geq n$. **(2 puncte)**

Aplicând inegalitatea mediilor obţinem

$$\sqrt{x^2 - nx} + \sqrt{x^2 - n^2} + \sqrt{x^2 + nx} > 3\sqrt[3]{x(x^2 - n^2)},$$

(2 puncte)

Este suficient să arătăm că

$$3\sqrt[3]{x(x^2 - n^2)} > 3x - 1 \Leftrightarrow 27x^3 - 27xn^2 > 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 \Leftrightarrow$$

$$27x\left(x - \frac{3n^2 + 1}{3}\right) + 1 > 0,$$

care este adevărată, deoarece $x > 0$ și $x - \frac{3n^2+1}{3} \geq 0$. Deci $P_n(x) > -1, \forall x \geq n^2 + \frac{1}{3}$. **(2 puncte)**

În concluzie, $[P_n(x)] = -1$ pentru orice $x \in \left[n^2 + \frac{1}{3}, \infty\right)$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. **(1 punct)**

Subiecte selectate și propuse de către
Prof. GIURGI VASILE