CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIȚIA A XXVIII-A
11.05.2024
Clasa a X-a
BAREM

Subiectul 1

Arătați că nu există numere întregi a, b, c astfel încât $(a+b\sqrt{3}i)^{17} = c + i\sqrt{3}$.

Soluție
Din egalitatea
$$(C_{17}^0 a^{17} - 3C_{17}^2 a^{15}b^2 + \cdots + 3^8 C_{17}^{16} ab^{16}) + (C_{17}^1 a^{16}b - 3C_{17}^3 a^{14}b^3 + \cdots + 3^8 C_{17}^{17} b^{17}) \cdot i\sqrt{3} = c + i\sqrt{3}$$
se obține $(C_{17}^1 a^{16} - 3C_{17}^3 a^{14}b^2 + \cdots + 3^8 C_{17}^{17} b^{16}) \cdot b = 1$ ceea ce implică
$$b = \pm 1.$$ **(3 puncte)**

Dacă $b = 1$, cum C_{17}^k se divide cu 17, pentru orice $k \in \{1,2,\ldots,16\}$, rezultă $3^8 - 1 = 6560 \vdots 17$, fals.
Deci $b = -1$ **(1 punct)**

Similar, dacă $a \neq \pm 1$, deducem că a^2 divide $3^8 + 1 = 2 \cdot 17 \cdot 193$, fals. **(1 punct)**

Dacă $a = 1$, avem $(1 - i\sqrt{3})^{17} = c + i\sqrt{3}$, de unde folosind scrierea trigonometrică, obținem $2^{17}\sin\frac{85\pi}{3} = \sqrt{3}$, adică $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2^{17}}$, absurd. În mod analog se elimină și cazul $a = -1$. **(2 puncte)**

Subiectul 2.

Determinați numerele reale x, y, z pentru care au loc egalitățile
$$\left(\sqrt{x}\right)^{\log_2 x} + y^{\log_2 \frac{1}{y}} = \left(\sqrt{y}\right)^{\log_2 y} + z^{\log_2 \frac{1}{z}} = \left(\sqrt{z}\right)^{\log_2 z} + x^{\log_2 \frac{1}{x}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Soluție
Condiții de existență $x, y, z \in (0, \infty)$.
Avem $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_2 x} = 2^{\frac{1}{2}(\log_2 x)^2}$ și $x^{\log_2 \frac{1}{x}} = 2^{-(\log_2 x)^2}$, cu analoagele **(2 puncte)**
Cu notațiile $(\log_2 x)^2 = 2a$, $(\log_2 y)^2 = 2b$, respectiv $(\log_2 z)^2 = 2c$, sistemul inițial devine
$$\begin{cases} 2^a + 4^{-b} = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \\ 2^b + 4^{-c} = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \\ 2^c + 4^{-a} = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \end{cases}$$
Considerăm funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu $f(t) = 2^t + 4^{-t}$.

Avem $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}$, iar prin adunarea egalităților precedente se obține

$$f(a) + f(b) + f(c) = 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$$ **(2 punct)**

Se arată că pentru $a > \frac{1}{3}$ se obține $b > \frac{1}{3}$ și $c > \frac{1}{3}$. Cum f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$, rezultă $f(a) + f(b) + f(c) > 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$. Analog pentru $a < \frac{1}{3}$ se obține $b < \frac{1}{3}$ și $c < \frac{1}{3}$. Cum f este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, rezultă $f(a) + f(b) + f(c) < 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ **(2 puncte)**

Atunci $a = b = c = \frac{1}{3}$, ceea ce implică $x = y = z = 2^{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}}$ **(1 punct)**

Subiectul 3.

Arătați că funcția $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, unde $g(n)$ este numărul cuburilor perfecte din intervalul $[n^3, 3n^3]$, este surjectivă.

Soluție și barem

Avem $g(n) = \left[n\sqrt[3]{3}\right] - n + 1 \in \mathbb{N}$. **(1 punct)**

Atunci $g(n+1) - g(n) = \left[n\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}\right] - \left[n\sqrt[3]{3}\right] - 1 \ \in \ \{0,1\}$ **(2 punct)**

Cum $g(n+1) \geq g(n)$.avem că șirul $\left(g(n)\right)_{n\geq 1}$ este crescător **(1 punct)**

cu $g(n) > n$, deci șirul $\left(g(n)\right)_{n\geq 1}$ este nemărginit **(1 punct)**

Deoarece $g(n+1) - g(n) \leq 1$, cu $g(1) = 1$, se deduce că $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{N}^*$ ceea ce asigură faptul că funcția f este surjectivă **(2 puncte)**

Subiecte selectate și propuse de către
Prof. POP OVIDIU-FLORIN