**CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”**
**EDIŢIA A XXVIII-A**
**11.05.2024**

**Clasa a XI-a**
**BAREM**

**Subiectul 1**

Fie $a \in (0, \infty)$. Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ pentru care $a_1 = a$ și

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n^2 + a_n + 1}, \qquad 1 + a_n = a_n^2 \cdot b_n, \qquad n \geq 1.$$

a) Arătați că $b_n = b_1 + n - 1$ oricare ar fi $n \geq 1$, cu $b_1 = (1 + a) \cdot a^{-2}$.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

*Gazeta Matematică 10/2023 (prelucrare)*

**Soluție**

a) Cum

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n^2 + a_n + 1} \Leftrightarrow \frac{a_n^2 + a_n + 1}{a_n^2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1}^2} \Leftrightarrow 1 + b_n = b_{n+1}$$

**(1 punct)**

Din

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (1 + b_k)$$

se deduce $b_n = b_1 + n - 1$ pentru orice $n \geq 1$ **(2 puncte)**

b) Avem

$$1 + a_n = a_n^2 \cdot b_n \Leftrightarrow a_n^2 b_n - a_n - 1 = 0$$

cum $a_n > 0$, deci

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot b_n}}{2 \cdot b_n}, \quad n \geq 1.$$

**(1 punct)**

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ se deduce

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot b_n}}{2 \cdot b_n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b_n} + \sqrt{\frac{1}{b_n^2} + \frac{4}{b_n}}\right) = 0.$$

**(3 puncte)**

**Subiectul 2.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu $A \neq B$, $(A-B)^2 = O_3$ și $A^3 = ABA$. Arătați că

$$\det(xA + yB) = 0, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}.$$

*Gazeta Matematică 1/2024*

**Soluție**

Din $(A-B)^2 = O_3$ se obține $A^2 + B^2 = AB + BA$ și $\det(A-B) = 0$. **(1 punct)**

Din $A^2 + B^2 = AB + BA$ se deduce $AB^2 = A^2B$ și $B^2A = BA^2$ **(1 punct)**

Presupunem $\det(A) \neq 0$. Atunci $A^3 = ABA \Rightarrow A = B$ contradicție, deci
$\det(A) = 0$. **(0,5 puncte)**

Presupunem $\det(B) \neq 0$. Atunci $AB^2 = A^2B \Rightarrow B^2 = BA \Rightarrow A = B$ contradicție, deci
$\det(B) = 0$. **(0,5 puncte)**

Presupunem $\det(A+B) \neq 0$. Atunci $A^2 + B^2 = AB + BA$ implică
$\det(A^2 + B^2) \neq 0$ și $\det(AB + BA) \neq 0$ **(0,5 puncte)**

Se deduce $A^2 = AB = BA = B^2$, deci $\det(AB + BA) = 0$ contradicție, deci
$\det(A+B) = 0$. **(0,5 puncte)**

Fie funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu $f(z) = \det(A + zB)$ oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$.

Avem $f(z) = \det(B) \cdot z^3 + c \cdot z^2 + d \cdot z + \det(A) = cz^2 + dz$, unde $c, d \in \mathbb{C}$ **(0,5 puncte)**

Din $f(1) = \det(A+B) = 0 = c + d$ și $f(-1) = \det(A-B) = 0 = c - d$ se obține
$f(z) = \det(A + zB) = 0$ oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$. **( 1 punct)**

Pentru $x \in \mathbb{C}^*$ avem

$$\det(xA + yB) = \det\left(x\left(A + \frac{y}{x}B\right)\right) = x^3 \cdot \det\left(A + \frac{y}{x}B\right) = x^3 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$ **(0,5 puncte)**

Pentru $x = 0$ avem $\det(xA + yB) = \det(yB) = y^3 \cdot \det(B) = 0$ **(0,5 puncte)**

În concluzie, $\det(xA + yB) = 0, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}$. **(0,5 puncte)**

**Subiectul 3.**

Determinați funcțiile $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, continue în punctul $x_0 = 1$, cu proprietatea că

$$f(x^3) - f(y^3) \le \big(x - f(y)\big) \cdot \big(f(x^2) + xy + y^2\big), \quad \forall\, x, y \in [0, \infty).$$

*Gazeta Matematică 12/2023 (prelucrare)*

**Soluție și barem**

Pentru $x = y = 0$ se obține $f^2(0) \le 0$, deci $f(0) = 0$
Pentru $y = 0$ se obține $f(x^3) \le xf(x^2)$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$
Pentru $x = 0$ se obține $f(y^3) \ge y^2 f(y)$ oricare ar fi $y \in [0, \infty)$
Deci $x^2 f(x) \le f(x^3) \le xf(x^2)$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$, ceea ce implică **(1 puncte)**

$$\frac{f(x)}{x} \le \frac{f(x^3)}{x^3} \le \frac{f(x^2)}{x^2}$$

Fie funcția $h: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu $h(t) = \frac{f(t)}{t}$. Se arată că

$$h\left(t^{\frac{1}{3^n}}\right) \le h(t) \le h\left(t^{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right), \qquad \forall\, t \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}^*$$

Prin trecere la limită, când $n \to \infty$, cum $h$ este continuă în $x_0 = 1$,
se obține $h(t) = h(1)$ pentru orice $t \in (0, \infty)$.
Atunci $f(x) = ax$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, unde $a = h(1)$. **(3 puncte)**

Inegalitatea din enunț devine $0 \le xy(1 - a)[(1 + a)x + y]$
Pentru $a > 1$ rezultă $1 - a < 0$ și $xy[(1 + a)x + y] > 0$ contradicție
Pentru $a < -1$ și $x = y$ rezultă $xy(1 - a) > 0$ și $(1 + a)x + y < 0$ contradicție
Pentru $a = \pm 1$ se obține o inegalitate adevărată.
Pentru $a \in (-1, 1)$, cum $1 - a > 0$ și $1 + a > 0$,
se obține $xy(1 - a)[(1 + a)x + y] > 0$ pentru orice $x, y \in (0, \infty)$
În concluzie, funcția căutată este

$$f(x) = ax, \text{ oricare ar fi } x \in [0, \infty), \text{ unde } a \in [-1,1].$$ **(3 puncte)**



Colegiul Național ”Dragoș Vodă”
Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0262.311.958 /Fax 0262.318.509
Email: cndv.sighet@gmail.com, Web: www.cndv.ro