CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”
EDIŢIA A XXVIII-A
11.05.2024

Clasa a XII-a
BAREM

Subiectul 1

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[0,1]$ pentru care inegalitatea

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$$

are loc oricare ar fi $x\in[0,1]$. Arătați că

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq \frac{1}{3}.$$

Soluție

Cum f este continuă, avem că f admite primitive. Fie $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției f.

Relația din ipoteza problemei devine $F(1)-F(x)\geq\frac{1-x^2}{2}$, $\forall x\in[0,1]$. **(1 punct)**

Atunci $\int_0^1\big(F(1)-F(x)\big)dx\geq\int_0^1\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{1}{3}$. **(1 punct)**

Avem

$$F(1)=x\cdot F(x)|_0^1=\int_0^1(x\cdot F(x)'dx)=\int_0^1 F(x)dx+\int_0^1 x\cdot f(x)dx$$

(2 puncte)

deci

$$\int_0^1 x\cdot f(x)dx=F(1)-\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\big(F(1)-F(x)\big)dx\geq\frac{1}{3}$$

(1 punct)

Din $(f(x)-x)^2\geq 0$ oricare ar fi $x\in[0,1]$, se obține

$$\int_0^1 f^2(x)dx\geq\int_0^1(2xf(x)-x^2)dx\geq 2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

(2 puncte)

Subiectul 2. Fie $(R,+,\cdot)$ un inel în care are loc proprietatea

există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât egalitatea $x^{5(k+1)+1} = x^{5k+1}$ are loc pentru orice $x \in R$.

Arătați că ecuația $x^2 = 0$ are soluție unică în R.

Andrei Horvat-Marc

Soluție

Numerele $5(k+1)+1$ și $5k+1$ au parități diferite, deci pentru $x \coloneqq -1$,
din $(-1)^{5(k+1)+1} = (-1)^{5k+1}$ se obține $-1 = 1$, deci $1 + 1 = 0$
ceea ce implică $x + x = 0$ oricare ar fi $x \in R$. **(2 puncte)**

Fie $\alpha \in R$ o soluție a ecuației $\alpha^2 = 0$. Atunci $(1+\alpha)^2 = 1 + \alpha + \alpha + \alpha^2 = 1$. **(1 punct)**

Cum $(1+\alpha)^2 = 1$, avem $(1+\alpha)^{2n} = 1$ și $(1+\alpha)^{2n+1} = 1 + \alpha$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **(2 puncte)**

Din $(1+\alpha)^{5(k+1)+1} = (1+\alpha)^{5k+1}$ se obține $1 + \alpha = 1$, deci $\alpha = 0$. **(1 punct)**

În concluzie, ecuația $x^2 = 0$ are soluția unică $x = 0 \in R$. **(1 punct)**

Subiectul 3.

a) Arătați că

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

b) Calculați

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin 2x - \cos 2x + 1}\,dx.$$

Soluție și barem

a) (3 puncte)

Metoda 1. În integrala $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ se face schimbarea de variabilă $1 + x = \frac{2}{t}$, cu $dx = -\frac{2}{t^2}dt$.

Se obține

$$I_1 = \int_2^1 \frac{\ln 2 - \ln t}{\frac{4-4y+2y^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{2}{t^2}\right) dt = \ln 2 \cdot \int_1^2 \frac{1}{(t-1)^2+1}dt - \int_1^2 \frac{\ln t}{(t-1)^2+1}dt$$

$$I_1 = \frac{}{}\ln 2 \cdot \operatorname{arctg}(t-1)\Big|_1^2 - I_1$$

Atunci

$$2I_1 = \ln 2 \cdot (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi \ln 2}{4}$$

Deci

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Metoda 2. În integrala $I_1=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ se face schimbarea de variabilă $x=\operatorname{tg} t$, cu $\frac{dx}{1+x^2}=dt$. Se obține ,

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\operatorname{tg} t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}\right)dt$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg} t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,dt-I_1$$

Deci

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

b) În integrala

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin 2x-\cos 2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg} x}dx$$

(1 punct)

se face schimbarea de variabilă $x=\operatorname{ctg} t$, cu $-\frac{dx}{\sin^2 x}=dt$ și se obține

$$I=\frac{1}{2}\int_1^0\frac{\operatorname{arcctg} t}{1+t}(-dt)=\frac{1}{2}\int_0^1\operatorname{arcctg} t\cdot(\ln(t+1))'dt$$

(1 punct)

Integrând prin părți, rezultă

$$I=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcctg} t\cdot\ln(t+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\ln 2}{4}-I_1\right)$$

(1 punct)

Deci

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin 2x-\cos 2x+1}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\ln 2}{4}-\frac{\pi\ln 2}{8}\right)=\frac{3\pi\ln 2}{16}$$

(1 punct)

Subiecte selectate și propuse de către
Prof. GIURGI VASILE