TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a VI-a

1. Se consideră mulțimea $M = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{15}\}$.
   a) Dați exemplu de trei mulțimi A, B și C, nevide și disjuncte două câte două, astfel încât $A \cup B \cup C = M$, iar produsul elementelor fiecărei mulțimi să fie același.
   b) Arătați că nu există trei mulțimi X, Y și Z, nevide și disjuncte două câte două, astfel încât $X \cup Y \cup Z = M$, iar suma elementelor fiecărei mulțimi să fie același.

2. Determinați numerele naturale x, y, z, știind că

$$\frac{x^2+2}{10y-2} = \frac{x^2+3}{9y+1} = \frac{z^3-9}{z^2+9}.$$

3. Pe dreapta d se consideră punctele A, O, B, cu $O \in (AB)$. Fie semidreptele $(OC$ și $(OD$ aflate în același semiplan determinat de dreapta d, astfel încât $\sphericalangle COD = 70^0$. Să se determine măsura $\sphericalangle MON$, știind că $(OM$ și $(ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$ și respectiv $\sphericalangle AOC$.

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Hossu Călin, Școala Gimnazială „Dimitrie Cantemir” Baia Mare
prof. Zetea Bogdan, Școala Gimnazială „George Coșbuc” Sighetu Marmației

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a VI-a
BAREM

1. Se consideră mulțimea $M = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{15}\}$.

a) Dați exemplu de trei mulțimi A, B și C, nevide și disjuncte două câte două, astfel încât $A \cup B \cup C = M$, iar produsul elementelor fiecărei mulțimi să fie același.

b) Arătați că nu există trei mulțimi X, Y și Z, nevide și disjuncte două câte două, astfel încât $X \cup Y \cup Z = M$, iar suma elementelor fiecărei mulțimi să fie același.

Soluție:

a) $A \cup B \cup C = M,\ A \cap B = \emptyset,\ A \cap C = \emptyset,\ B \cap C = \emptyset$

$P_M = 2^{15\cdot 8} \Rightarrow P_A = P_B = P_C = 2^{40}$ **2p**

$A = \{2^{15}, 2^{14}, 2^{11}\}$

$B = \{2^{13}, 2^{12}, 2^{10}, 2^5\}$

$C = \{2^9, 2^8, 2^7, 2^6, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1\}$ **2p**

Orice alt exemplu corect se punctează cu 2p.

b)

$S_M = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{15}$

$S_M = 2^{16} - 2$ **1p**

$S_A + S_B + S_C = 2^{16} - 2 \ \Rightarrow 3S_A = 2^{16} - 2$

$2^{16} - 2 = (M_3 - 1)^{16} - 2 = M_3 + 1 - 2 = M_3 - 1 \Rightarrow 3 \nmid S_M \Rightarrow$*nu există* **2p**

2. Determinați numerele naturale x, y, z, știind că

$$\frac{x^2+2}{10y-2} = \frac{x^2+3}{9y+1} = \frac{z^3-9}{z^2+9}$$

Soluție :

$\frac{x^2+2}{10y-2} = \frac{x^2+3}{9y+1} \Rightarrow \frac{x^2+2}{x^2+3} = \frac{10y-2}{9y+1} \Rightarrow \frac{x^2+2}{1} = \frac{10y-2}{3-y}$ **1p**

$\frac{10y-2}{3-y} > 0$ **1p**

$10y - 2 > 0 \Rightarrow 3 - y > 0 \Rightarrow y \in \{1,2\}$ **2p**

I. $y = 1 \Rightarrow x^2 = 2$, nu convine

II. $y = 2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ **2p**

$z = 3$ **1p**

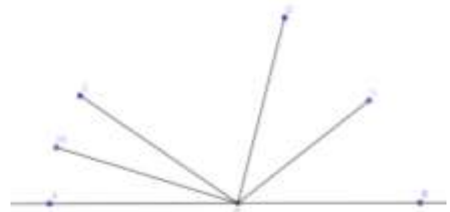
3. Pe dreapta d se consideră punctele A, O, B, cu $O \in (AB)$. Fie semidreptele $(OC$ și $(OD$ aflate în același semiplan determinat de dreapta d, astfel încât $\sphericalangle COD = 70^0$. Să se determine măsura $\sphericalangle MON$, știind că $(OM$ și $(ON$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ și respectiv $\sphericalangle BOD$.

Soluție :

I. $(OD \subset int \sphericalangle BOC$

$\sphericalangle MON = 180^0 - (\sphericalangle AOM + \sphericalangle BON)$ **2p**

$=180^0 - \frac{180^0 - \sphericalangle COD}{2} = 125^0$ **2p**



II. $(OC \subset int \sphericalangle BOD$

$\sphericalangle MON = 180^0 - (\sphericalangle BON + \sphericalangle AOM)$

$= 180^0 - \frac{\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle AOD + \sphericalangle COD}{2}$ **2p**

$\sphericalangle MON = 180^0 - 125^0 = 55^0$ **1p**