TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a VII-a

1. a) Arătați că dacă a și b sunt numere raționale pentru care $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$.
b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația
$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}=y.$$

2. Determinați suma tuturor fracțiilor ireductibile din mulțimea
$$M=\left\{\frac{k}{2024} \middle| k \in \mathbb{N}^*, k<2024\right\}.$$

3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și P un punct oarecare pe diagonala (BD). Pe semidreapta $(CP$ se ia punctul M, astfel încât $[PM] \equiv [CP]$ și se duc $ME \perp AD$ și $MF \perp AB$, unde $E \in AD$ și $F \in AB$. Demonstrați că:
a) $EF \parallel AC$;
b) punctele E, F și P sunt coliniare.

Subiectele au fost selectate și propuse de:
conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Centrul Universitar Nord Baia Mare
prof. Zetea Bogdan, Școala Gimnazială „George Coșbuc" Sighetu Marmației

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la *7.*
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a VII-a
BAREM

1. a) Arătați că dacă a și b sunt numere raționale pentru care $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$.
Soluție:
Dacă $a,b\in\mathbb{Q}$, atunci $a-b\in\mathbb{Q}$, deci $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\in\mathbb{Q}$.
Cum $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, se obține $\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. **1 punct**
Atunci $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})\in\mathbb{Q}$, deci $2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$. **0.5 puncte**
În concluzie $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$. **0.5 puncte**
b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația
$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}=y.$$
Soluție:
Din $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}\in\mathbb{N}$ se obține $\sqrt{4x+1}\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{x+3}\in\mathbb{Q}$. **1 punct**
Cum $x\in\mathbb{N}$, rezultă $4x+1\in\mathbb{N}$ și $x+3\in\mathbb{N}$ sunt pătrate perfecte. **1 punct**
Fie $a,b\in\mathbb{N}$ pentru care $4x+1=a^2$ și $x+3=b^2$. Atunci $4b^2-a^2=11$ **1 punct**
$(2b-a)(2b+a)=11$ **0.5 puncte**
$$\begin{cases}2b-a=1\\2b+a=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$$ **1 punct**
Se obține unica soluție
$$x=6 \text{ și } y=8.$$ **0.5 puncte**

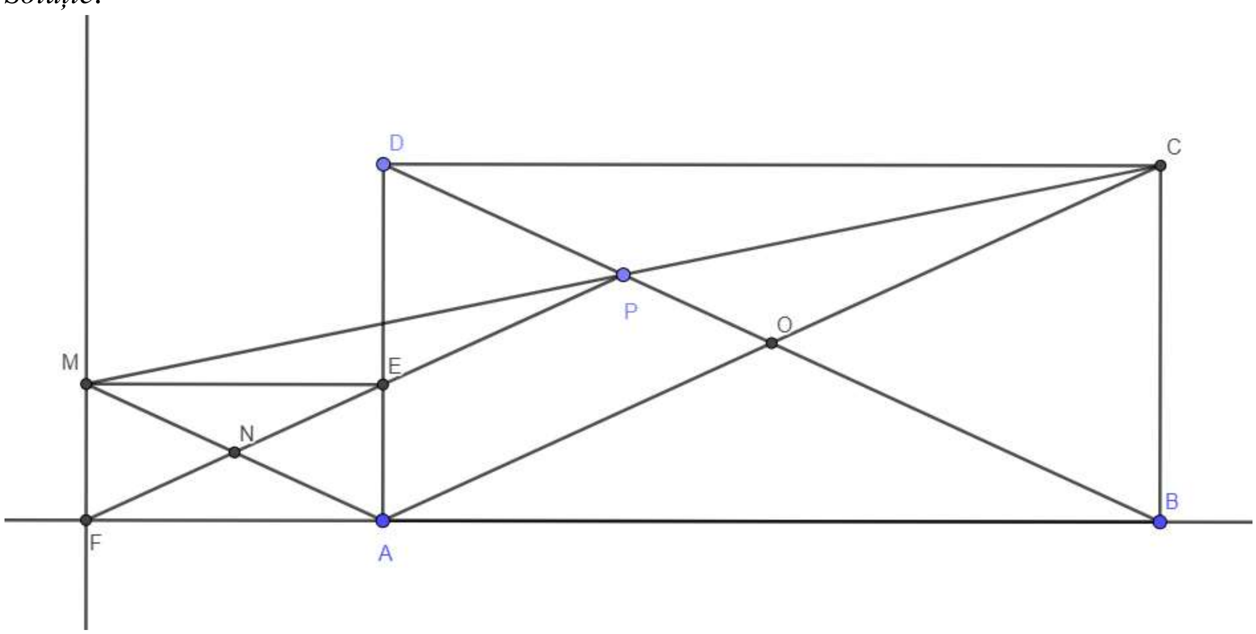
2. Determinați suma tuturor fracțiilor ireductibile din mulțimea
$$M=\left\{\frac{k}{2024}\middle|k\in\mathbb{N}^*,k<2024\right\}.$$
Soluție:
Arată că dacă fracția $\frac{k}{2024}$ este ireductibilă, atunci și fracția $\frac{2024-k}{2024}$ este ireductibilă și $\frac{k}{2024}\neq\frac{2024-k}{2024}$ oricare ar fi $k=\overline{1,2023}$. **2 punct**
Numărul numerelor relativ prime cu $2024=2^3\cdot 11\cdot 23$ este
$$\phi(2024)=2^3\cdot 11\cdot 23\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{23}\right)=4\cdot 10\cdot 22=880$$
Deci mulțimea M conține 880 de elemente. **3 puncte**
Fie S suma tuturor elementelor din mulțimea M.
Avem că $2S$ este suma tuturor fracțiilor $\frac{k}{2024}$, $1\le k\le 2023$, unde $(k,2024)=1$, adică $1\le k\le 2023$ este număr natural relativ prim cu 2024.
Cum $\frac{k}{2024}+\frac{2024-k}{2024}=1$, se obține $S=440$. **2 puncte**

3. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și P un punct oarecare pe diagonala (BD). Pe semidreapta $(CP$ se ia punctul M, astfel încât $[PM] \equiv [CP]$ și se duc $ME \perp AD$ și $MF \perp AB$, unde $E \in AD$ și $F \in AB$. Demonstrați că :

a) $EF \parallel AC$;

b) punctele E, F și P sunt coliniare.

Soluție:



a) Cum PO este linie mijlocie, rezultă $PO \parallel AM$, deci $AM \parallel BD$. **1 punct**

Atunci $\sphericalangle MAF = \sphericalangle DBA = \sphericalangle CAB$. **1 punct**

Patrulaterul $AEMF$ este dreptunghi, deci $\sphericalangle EFA = \sphericalangle MAF$. **1 punct**

Se obține $\sphericalangle EFA = \sphericalangle CAB$, deci $EF \parallel CA$. **1 punct**

b) Fie $AM \cap EF = \{N\}$.

Punctul N este mijlocul segmentului AM, punctul P este mijlocul segmentului MC, deci NP este linie mijlocie în triunghiul ΔMAC . **1 punct**

Atunci $NP \parallel AC$. **1 punct**

Cum $EF \parallel CA$ și $E \in NP$, rezultă că punctele P, E, F sunt coliniare. **1 punct**