TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a VIII-a

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ care verifică proprietatea $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=2$. Demonstrați că

$$|a+b+c|\le\sqrt{3}.$$

2. În exteriorul planului pătratului $ABCD$ se consideră punctul V cu proprietatea că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VBC$ și $\sphericalangle VDC$ sunt coplanare.

a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VBA$ și $\sphericalangle VDA$ sunt coplanare.

b) Fie $(BE,\ E\in VC$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle VBC$ și O centrul pătratului. Dacă $(OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle VOC$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle VBD$.

3. Fie A o mulțime cu $k\ge 2$ numere naturale nenule. Numim *partiție sincronizată* o pereche de mulțimi nevide (M,N) care partiționează mulțimea A (adică $M,N\subset A$, $M\cap N=\varnothing$ și $M\cup N=A$) și pentru care cel mai mic multiplu comun al elementelor unei mulțimi este egal cu cel mai mare divizor comun al elementelor celeilalte mulțimi. Spunem că acest număr este *măsura partiției*.

a) Demonstrați că mulțimea A admite mai puțin de k partiții sincronizate.

b) Dacă mulțimea A admite mai mult de $\frac{k}{2}$ partiții sincronizate, demonstrați că printre acestea există cel puțin una a cărei măsură este element al mulțimii A.

c) Pentru $k=6$, construiți un exemplu de mulțime A care admite numărul maxim de *partiții sincronizate* cu proprietatea că măsura niciuneia dintre acestea nu este element al mulțimii A.

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Mușuroia Nicolae, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Baia Mare
prof. Bojor Florin, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Baia Mare

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a VIII-a
BAREM

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ care verifică proprietatea $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=2$. Demonstrați că

$$|a+b+c|\le\sqrt{3}.$$

Soluție: Înmulțind egalitatea cu 2 se obține că $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=4$ **................2p**

Dar $a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3},\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ **...2p**

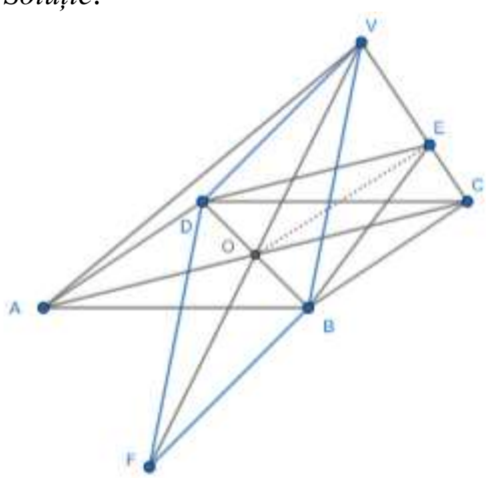
Se obține $(a+b+c)^2+\frac{(a+b+c)^2}{3}\le 4\Leftrightarrow(a+b+c)^2\le 3\Leftrightarrow|a+b+c|\le\sqrt{3}$ **.................3p**

2. În exteriorul planului pătratului $ABCD$ se consideră punctul V cu proprietatea că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VBC$ și $\sphericalangle VDC$ sunt coplanare.

a) Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VBA$ și $\sphericalangle VDA$ sunt coplanare.

b) Fie $(BE,\ E\in VC$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle VBC$ și O centrul pătratului. Dacă $(OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle VOC$, aflați măsura unghiului $\sphericalangle VBD$.

Soluție:



a) Fie $(BE$, $E\in VC$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle VBC$. Atunci bisectoarea unghiului $\sphericalangle VDC$ aparține planului (DBE) și planului (VDC), deci este intersecția acestor plane, adică DE.

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile ΔVBC și ΔVDC, ne rezultă că $\frac{VB}{BC}=\frac{VE}{EC}=\frac{VD}{DC}$, dar $BC=DC\Rightarrow VB=VD$.

Fie BM și DN bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VBA$ și $\sphericalangle VDA$, atunci $\frac{VM}{MA}=\frac{VB}{BA}=\frac{VD}{DA}=\frac{VN}{NA}$, de unde rezultă că $M=N\Rightarrow$ că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VBA$ și $\sphericalangle VDA$ sunt coplanare.

b) Dacă $(OE$ e bisectoarea unghiului $\sphericalangle VOC\Rightarrow\frac{VO}{OC}=\frac{VE}{EC}=\frac{VB}{BC}\Rightarrow\frac{VO}{VB}=\frac{OC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow VO=\frac{\sqrt{2}}{2}VB$.

Construim F simetricul lui V față de O, atunci $VBFD$ este paralelogram și cum $VB=VD\Rightarrow VBFD$ este romb. Dar $FB=VB=VO\sqrt{2}$ și $VF=2VO$, deci $VF^2=VB^2+BF^2\Rightarrow\sphericalangle VBF=90^\circ\Rightarrow VBFD$ este pătrat $\Rightarrow\sphericalangle VBD=45^\circ$

3. Fie A o mulțime cu $k \geq 2$ numere naturale nenule. Numim *partiție sincronizată* o pereche de mulțimi nevide (M, N) care partiționează mulțimea A (adică $M, N \subset A$, $M \cap N = \varnothing$ și $M \cup N = A$) și pentru care cel mai mic multiplu comun al elementelor unei mulțimi este egal cu cel mai mare divizor comun al elementelor celeilalte mulțimi. Spunem că acest număr este *măsura partiției*.

a) Demonstrați că mulțimea A admite mai puțin de k partiții sincronizate.

b) Dacă mulțimea A admite mai mult de $\frac{k}{2}$ partiții sincronizate, demonstrați că printre acestea există cel puțin una a cărei măsură este element al mulțimii A.

c) Pentru $k = 6$, construiți un exemplu de mulțime A care admite numărul maxim de *partiții sincronizate* cu proprietatea că măsura niciuneia dintre acestea nu este element al mulțimii A.

Soluție: **a)** Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ cu $0 < a_1 < a_2 < ... < a_k$ și (M, N) o partiție sincronizată. Atunci pentru orice $m \in M$ și orice $n \in N$ avem că $m \leq cmmmc(M) = cmmdc(N) \leq n$, deci există $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ pentru care $M = \{a_1, a_2, ..., a_i\}$ și $N = \{a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_k\}$, deci numărul acestora este cel mult $k-1$, deci admite mai puțin de k partiții sincronizate.

b) Cum A admite mai mult de $\frac{k}{2}$ partiții sincronizate, atunci va exista $a_i, a_{i+1} \in A$ astfel încât a_i și a_{i+1} sunt măsurile a două *partiții sincronizate,* deoarece în caz contrar numărul acestora este cel mult $\left[\frac{(n-1)+1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{n}{2}$, care e fals.

Avem atunci $cmmmc(a_1, a_2, ..., a_i) = cmmdc(a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_k)$, deci $cmmmc(a_1, a_2, ..., a_i)$ divide pe a_{i+1}, atunci $cmmmc(a_1, a_2, ..., a_{i+1}) = a_{i+1}$, deci partiția asociată indicelui $i+1$ este $a_{i+1} \in A$.

c) Conform lui **a)** *partițiile sincronizate* sunt asociate cu indicii $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Partițiile asociate indicilor $i = 1$ și $i = 5$ au măsurile elemente din A, deci nu convin. Pentru $i \in \{2, 3, 4\}$, avem trei partiții din care două sunt cu indici consecutivi, conform lui **b)** măsura uneia va fi în A. Așadar numărul maxim de *partiții sincronizate* căutat este cel mult 2.
Vom arăta că există o mulțime care are două *partiții sincronizate.*
Alegem $A = \{2, 3, 12, 18, 72, 108\}$, cu partiția $\{2, 3\}, \{12, 18, 72, 108\}$ a cărei măsură este $6 \notin A$ și partiția $\{2, 3, 12, 18\}, \{72, 108\}$, a cărei măsură este $36 \notin A$.