TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a IX-a

1. a) Să se arate că $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$, $\forall x,y,z>0$.

b) Se consideră numerele $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=s$. Demonstrați că

$$\frac{a+b}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}+\frac{b+c}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}+\frac{c+a}{\sqrt{(s-c)(s-a)}}\geq 3.$$

2. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(x)\cdot f(y)+f(x+y)=f(x)+f(y)+x\cdot y,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vasile Pop

3. Fie $A_1A_2...A_n$, $n\geq 4$ un poligon înscris într-un cerc. Pentru orice triunghi $A_iA_jA_k \overset{not}{=} T$, notăm cu H_T ortocentrul triunghiului și cu G_T centrul de greutate al punctelor $\{A_1,A_2,...,A_n\}\setminus\{A_i,A_j,A_k\}$.

Să se arate că dreptele H_TG_T sunt concurente.

Vasile Pop

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Boroica Gabriela, Colegiul Național „Vasile Lucaciu” Baia Mare
prof. Boroica Gheorghe, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Baia Mare

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la *7.*
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a IX-a
BAREM

1. a) Să se arate că $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2},\ \forall x,y,z>0.$

b) Se consideră numerele $a,b,c>0$ astfel încât $a+b+c=s$. Demonstrați că

$$\frac{a+b}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}+\frac{b+c}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}+\frac{c+a}{\sqrt{(s-c)(s-a)}}\geq 3.$$

Soluție:

a) $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\overset{T.A.}{\geq}\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+xz+yz)}\geq\frac{3(xy+xz+yz)}{2(xy+xz+yz)}=\frac{3}{2}$ **3p**

b) Avem $\sqrt{(s-a)(s-b)}\overset{m_g\leq m_a}{\leq}\frac{s-a+s-b}{2}=\frac{2s-(s-c)}{2}=\frac{s+c}{2}$ și analoagele

Atunci

$E=\frac{a+b}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}+\frac{b+c}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}+\frac{c+a}{\sqrt{(s-c)(s-a)}}\geq\frac{2(a+b)}{s+c}+\frac{2(b+c)}{s+a}+\frac{2(c+a)}{s+b}$ **2p**

Notând $a+b=x>0,\ b+c=y>0, c+a=z>0$, obținem

$E\geq 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\overset{a)}{\geq}2\cdot\frac{3}{2}=3$ **2p**

2. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația

$f(x)\cdot f(y)+f(x+y)=f(x)+f(y)+x\cdot y,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$. **(1)**

Vasile Pop

Soluție: $y=0\overset{(1)}{\Rightarrow}f(0)(f(x)-1)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ Dacă $f(0)\neq 0\Rightarrow f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, care nu verifică relația din ipoteză. Deci $f(0)=0$ **1p**

Pentru $y=-x\overset{(1)}{\Rightarrow}(f(x)-1)(f(-x)-1)=1-x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ **(2)** **1p**

În **(2)**, pentru $x=1$, obținem $(f(1)-1)(f(-1)-1)=0$ **1p**

Cazul 1: $f(1)=1$

Din **(1)**, pentru $y=1$, obținem $f(x+1)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, care verifică **(1)**.................**2p**

Cazul 2: $f(-1)=1$

Din **(1)**, pentru $y=-1$, obținem $f(x-1)=-(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$, care verifică **(1)**......**2p**

3. Fie $A_1A_2...A_n, n \geq 4$ un poligon înscris într-un cerc. Pentru orice triunghi $A_iA_jA_k \overset{not}{=} T$, notăm cu H_T ortocentrul triunghiului și cu G_T centrul de greutate al punctelor $\{A_1, A_2,...,A_n\} \setminus \{A_i, A_j, A_k\}$.

Să se arate că dreptele H_TG_T sunt concurente.

Vasile Pop

Soluție :

Poligonul fiind înscris în cerc avem $\overrightarrow{r_H} = \overrightarrow{r_{A_i}} + \overrightarrow{r_{A_j}} + \overrightarrow{r_{A_k}}$, $\overrightarrow{r_G} = \dfrac{\vec{S} - \left(\overrightarrow{r_{A_i}} + \overrightarrow{r_{A_j}} + \overrightarrow{r_{A_k}}\right)}{n-3}$ și

$\vec{S} = \overrightarrow{r_{A_1}} + \overrightarrow{r_{A_2}} + ... + \overrightarrow{r_{A_n}}$ **2p**

Dreapta *HG* are ecuația $\vec{r} = (1-t) \cdot \overrightarrow{r_H} + t \cdot \overrightarrow{r_G} = \left(1 - t - \dfrac{t}{n-3}\right) \cdot \overrightarrow{r_H} + \dfrac{t}{n-3} \cdot \vec{S}$ **2p**

Alegem *t* astfel încât $1 - t - \dfrac{t}{n-3} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{n-3}{n-2}$ (alegerea e făcută astfel încât punctul căutat să nu depindă de $\overrightarrow{r_H}$, adică de $\triangle A_iA_jA_k$)..**2p**

Pentru acest *t* obținem punctul comun *M* cu vectorul de poziție $\overrightarrow{r_M} = \dfrac{1}{n-2} \cdot \vec{S}$ **1p**