TABĂRA JUDEȚEANĂ CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,

Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024

Clasa a X-a

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ astfel încât $\left|\frac{b}{a}\right|=3$ și $\left|\frac{c}{a}\right|=4$. Arătați că $1\leq|\omega|\leq 4$, unde $\omega\in\mathbb{C}$ este o rădăcină a ecuației $az^2+bz+c=0$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{Q}$. Determinați funcțiile $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ care satisfac ecuația funcțională

$$f\big(x+a+f(y)\big)=f(x+b)+y, \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

Vasile Pop

3. a) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Calculați suma $S=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot k\cdot C_{n-1}^{k-1}$

b) Fie A, cu $|A|\geq 3$, o mulțime de puncte din plan, $\mathcal{P}(A)$ este mulțimea tuturor submulțimilor lui A și $\mathcal{R}$ este mulțimea regiunilor poligonale convexe închise care au vârfurile în puncte din mulțimea A. Pentru fiecare pereche $(R,P)\in\mathcal{R}\times\mathcal{P}(A)$, notăm cu $S(R,P)$ cardinalul mulțimii $R\cap P$.

Fiecărui punct din A i se alocă un scor după următorul algoritm:

- inițial toate punctele din mulțimea A au scorul 0;
- pentru fiecare pereche $(R,P)\in\mathcal{R}\times\mathcal{P}(A)$, dacă $S(R,P)$ este un număr par, atunci scorul fiecărui punct din $R\cap P$ se mărește cu $S(R,P)$, iar dacă $S(R,P)$ este un număr impar, atunci scorul fiecărui punct din $R\cap P$ se micșorează cu $S(R,P)$.
- algoritmul se încheie atunci când fiecărei perechi $(R,P)\in\mathcal{R}\times\mathcal{P}(A)$ i s-a alocat o singură dată scorul.

Arătați că după aplicarea integrală a algoritmului, fiecare punct din mulțimea A are scorul 0.

Cristi Săvescu

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Giurgi Vasile, Colegiul Național „Dragoș Vodă” Sighetu Marmației
conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Centrul Universitar Nord Baia Mare

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuş, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a X-a
<u>BAREM</u>

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ astfel încât $\left|\frac{b}{a}\right|=3$ și $\left|\frac{c}{a}\right|=4$. Arătați că $1\le|\omega|\le 4$, unde $\omega\in\mathbb{C}$ este o rădăcină a ecuației $az^2+bz+c=0$.

Soluție:

Avem $|b|=3\cdot|a|$ și $|c|=4\cdot|a|$ **0.5 puncte**

Fie $\omega\in\mathbb{C}$ o rădăcină a ecuației $az^2+bz+c=0$. Atunci
$-c=a\omega^2+b\omega\Rightarrow|c|=|a\omega^2+b\omega|$. **0.5 puncte**

Cum $|a\omega^2+b\omega|\le|a\omega^2|+|b\omega|=|a|\cdot|\omega|^2+|b|\cdot|\omega|$, se obține

$4\cdot|a|\le|a|\cdot|\omega|^2+3\cdot|a|\cdot|\omega|\Rightarrow|\omega|^2+3\cdot|\omega|-4\ge 0$.

care implică $|\omega|\ge 1$. **3 puncte**

Cum $|a\omega^2+b\omega|\ge|a\omega^2|-|b\omega|=|a|\cdot|\omega|^2-|b|\cdot|\omega|$, se obține

$4\cdot|a|\ge|a|\cdot|\omega|^2-3\cdot|a|\cdot|\omega|\Rightarrow|\omega|^2-3\cdot|\omega|-4\le 0$,

care implică $|\omega|\le 4$. **3 puncte**

În concluzie $1\le|\omega|\le 4$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{Q}$. Determinați funcțiile $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ care satisfac ecuația funcțională

$$f(x+a+f(y))=f(x+b)+y,\forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

Soluție:

Dacă $y_1,y_2\in\mathbb{Q}$ și $f(y_1)=f(y_2)$, atunci

$f(x+a+f(y_1))=f(x+b)+y_1$

$f(x+a+f(y_2))=f(x+b)+y_2$

deci $y_1=y_2$. Rezultă că funcția f este injectivă. **2 puncte**

Pentru $x=-a$ se obține $f(f(y))=f(-a+b)+y,\forall y\in\mathbb{Q}$,

deci f este surjectivă. **1 punct**

Dacă f este surjectivă, atunci există $z\in\mathbb{Q}$ pentru care $x=f(z)-a$,

iar ecuația funcțională devine

$f(f(z)+f(y))=f(f(z)-a+b)+f(f(y))-f(-a+b)$

care se poate scrie (cu $u=f(z)$, $v=f(y)$ și $c=b-a$)

(1.1) $$f(u+v)=f(u+c)+f(v)-f(c).$$

Pentru $v=f(y)=0$ se obține $f(u)=f(u+c)+f(0)-f(c)$, iar după înlocuirea în (1.1) rezultă

$$f(u+v)=f(u)+f(v)-f(0).$$

1 punct

Pentru $g(u)=f(u)-f(0)$ rezultă ecuația lui Cauchy

$$g(u+v)=g(u)+g(v),\forall u,v\in\mathbb{Q}.$$

Atunci, există $\alpha\in\mathbb{Q}$ pentru care $g(u)=\alpha\cdot u$, oricare ar fi $u\in\mathbb{Q}$. **1 punct**

Rezultă $f(x)=\alpha x+f(0)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Q}$. **1 punct**

După înlocuirea în ecuația inițială, rezultă soluțiile

$f_1(x)=x+b-a,\forall x\in\mathbb{Q}$

$f_2(x)=-x+b-a,\forall x\in\mathbb{Q}$. **1 punct**

3. a) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Calculați suma $S=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot k\cdot C_{n-1}^{k-1}$

b) Fie A, cu $|A|\geq 3$, o mulțime de puncte din plan, $\mathcal{P}(A)$ este mulțimea tuturor submulțimilor lui A și $\mathcal{R}$ este mulțimea regiunilor poligonale convexe închise care au vârfurile în puncte din mulțimea A. Pentru fiecare pereche $(R,P)\in\mathcal{R}\times\mathcal{P}(A)$, notăm cu $S(R,P)$ cardinalul mulțimii $R\cap P$.

Fiecărui punct din A i se alocă un scor după următorul algoritm:

- inițial toate punctele din mulțimea A au scorul 0;
- pentru fiecare pereche $(R,P)\in\mathcal{R}\times\mathcal{P}(A)$, dacă $S(R,P)$ este un număr par, atunci scorul fiecărui punct din $R\cap P$ se mărește cu $S(R,P)$, iar dacă $S(R,P)$ este un număr impar, atunci scorul fiecărui punct din $R\cap P$ se micșorează cu $S(R,P)$.
- algoritmul se încheie atunci când fiecărei perechi $(R,P)\in\mathcal{R}\times\mathcal{P}(A)$ i s-a alocat o singură dată scorul.

Arătați că după aplicarea integrală a algoritmului, fiecare punct din mulțimea A are scorul 0.

Soluție:

a) $S=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot k\cdot C_{n-1}^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n-1}^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot(k-1)\cdot C_{n-1}^{k-1}$

$$S=-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot C_{n-1}^{k}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\cdot(k-1)\cdot\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$S=-(1-1)^{n-1}+(n-1)\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}$$

$$S=0+(n-1)\cdot\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\cdot C_{n-2}^{k-2}=(n-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\cdot C_{n-2}^{k}=(n-1)\cdot(1-1)^{n-2}=0$$

4 puncte

b) Fie $X\in A$, $\mathcal{R}_X$ regiunile din $\mathcal{R}$ care conțin punctul X și S_X scorul punctului X. Atunci

$$S_X=\sum_{R\in\mathcal{R}_X}\left(\sum_{k=1}^{|R|}(-1)^k\cdot k\cdot C_{|R|-1}^{k-1}\cdot 2^{n-|R|}\right)=\sum_{R\in\mathcal{R}_X}\left(2^{n-|R|}\cdot\left(\sum_{k=1}^{|R|}(-1)^k\cdot k\cdot C_{|R|-1}^{k-1}\right)\right)=0$$

3 puncte