TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ astfel ca $A \cdot B = I_2$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numerele situate pe aceeași linie sau pe aceeași coloană în matricele A^n și B^n sunt relativ prime.

Vasile Pop

2. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$ și $(a_n - 1)(1 + a_{n+1}) = -1, \forall n \in \mathbb{N}$. Studiați convergența șirului $(a_n)_{n\geq 0}$.

Robert Rogozsan

3. Se consideră $p > 0$ și șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^3 + pa_{n-1}^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Gheorghe Boroica

Subiectele au fost selectate și propuse de:
prof. Boroica Gheorghe, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Baia Mare
student Rogozsan Robert, Universitatea București

***Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la** 7.*
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a XI-a
<u>BAREM</u>

1. $A\cdot B=I_n \Rightarrow \det(A\cdot B)=\det(I_n)\Rightarrow \det(A)\cdot\det(B)=1\Rightarrow \det(A),\det(B)\in\{\pm1\}$ **.................2p**

Atunci $\det(A^n)\in\{\pm1\}$, $\det(B^n)\in\{\pm1\}$ **...1p**

Fie $A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})\Rightarrow x_nt_n-y_nz_n=\pm1$**...1p**

Fie $(x_n,z_n)=d\Rightarrow d\,|\,x_n, d\,|\,z_n\Rightarrow d\,|\,x_nt_n-y_nz_n\Rightarrow d\,|\pm1\Rightarrow d=1$, deci elementele de pe coloana 1 a matricei A^n sunt prime între ele. Analog pentru restul liniilor și coloanelor**...............................3p**

2. Dacă există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a_k=0$, pentru $n=k-1\overset{ip.}{\Rightarrow} a_{k-1}=0$ și inductiv rezultă $a_0=0\,(F)$, așadar $a_n\neq0,\forall n\in\mathbb{N}$.

Din ipoteză $\Rightarrow a_n=a_{n+1}-a_na_{n+1},\forall n\geq0\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-1$, $\forall n\geq 0$.

Dacă notăm cu $b_n=\frac{1}{a_n}$, avem $b_{n+1}=b_n-1,\forall n\geq0$ deci $b_n=b_0-n,\forall n\geq0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, deci $(a_n)_{n\geq0}$ este convergent la 0.

3. Prin inducție se demonstrează că $a_n>0,\forall n\geq0$.

Avem $a_{n+1}=\sqrt[3]{a_n^3+pa_{n-1}^2}>\sqrt[3]{a_n^3}=a_n,\forall n\geq1\Rightarrow (a_n)_{n\geq0}$ e crescător, deci există $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Presupunem că $\ell\in\mathbb{R}\Rightarrow \ell=\sqrt[3]{\ell^3+p\ell^2}\Leftrightarrow p\ell^2=0\Rightarrow \ell=0\,(F)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ **.................3p**

Dacă $n\geq1$, atunci

$$0<a_n\leq a_{n+1}\leq\sqrt[3]{a_n^3+pa_n^2}<\sqrt[3]{\left(a_n+\frac{p}{3}\right)^3}=a_n+\frac{p}{3}\Rightarrow 1\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}<1+\frac{p}{3a_n}\overset{T.clestelui}{\Rightarrow}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

Deoarece $a_{n+1}-a_n=\sqrt[3]{a_n^3+pa_{n-1}^2}-a_n=\dfrac{pa_{n-1}^2}{\sqrt[3]{\left(a_n^3+pa_{n-1}^2\right)^2}+a_n\sqrt[3]{\left(a_n^3+pa_{n-1}^2\right)}+a_n^2}$

$$=\frac{p\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2}{\sqrt[3]{\left(1+p\frac{a_{n-1}^2}{a_n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+p\frac{a_{n-1}^2}{a_n^3}}+1}\overset{n\to\infty}{\to}\frac{p}{3}.$$

Folosind lema lui Stolz-Cesaro obținem că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{p}{3}$ **..4p**