TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a XII-a

1. Aflați primitivele funcției $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}+(2x+1)e^{x}+x^{2}}{e^{x}+x+1}$.

Gabriela Boroica, Revista ,,Argument” Nr. 24/2023

2. Fie $M=\left\{A\in M_n(\mathbb{R})\middle| A^3-A^2-A=2I_n\right\}$.

a. Arătați că $M\neq\varnothing$ și pentru orice $A\in M$ avem $1\leq\det(A)\leq 2^n$.

b. Fie $GL_n(\mathbb{R})=\left\{A\in M_n(\mathbb{R})\middle|\det(A)\neq 0\right\}$. Demonstrați că nu există o submulțime nevidă H a lui M care să fie parte stabilă a lui $GL_n(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

3. Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție pentru care inegalitatea

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}+|x-y|\geq\alpha$$

are loc oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$, cu $x\neq y$. Arătați că dacă funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Andrei Horvat-Marc

Subiectele au fost selectate și propuse de:
conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Centrul Universitar Nord Baia Mare
prof. Bojor Florin, Colegiul Național ,,Gheorghe Șincai” Baia Mare

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIV-a 2024,
Târgu Lăpuș, 01.09.2024-07.09.2024
Clasa a XII-a
<u>BAREM</u>

1. Scriem integrala convenabil:

$$\int \frac{e^{2x}+(2x+1)e^x+x^2}{e^x+x+1}dx=\int \frac{e^{2x}+xe^x+e^x}{e^x+x+1}dx+\int \frac{xe^x+x^2}{e^x+x+1}dx$$ **2p**

$$=e^x+\int \frac{xe^x+x^2+x}{e^x+x+1}dx-\int \frac{x}{e^x+x+1}dx$$ **2p**

$$=e^x+\frac{x^2}{2}-\int \frac{e^x+x+1}{e^x+x+1}dx+\int \frac{e^x+1}{e^x+x+1}dx$$ **1p**

$$=e^x+\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{\left(e^x+x+1\right)'}{e^x+x+1}dx$$ **1p**

$$=e^x+\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(e^x+x+1\right)+\mathscr{C}$$ **1p**

2. a. Dacă $A\in M$, atunci $A^3-A^2-A-2I_2=0$, deci orice valoare proprie a matricei A verifică ecuația $\lambda^3-\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow(\lambda-2)\left(\lambda^2+\lambda+1\right)=0$, deci $\lambda_1=2,\lambda_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\lambda_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ sunt posibilele valori proprii ale matricei A **1p**

Dar polinomul caracteristic matricei A, are coeficienți reali, deci λ_2 și λ_3 au același ordin de multiplicitate, în plus $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=1$.

Dar determinatul unei matrice este produsul valorilor proprii, deci există $p\in\left\{0,1,...,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ astfel încât $\det(A)=\lambda_1^{n-2p}\cdot(\lambda_2\cdot\lambda_3)^p=2^{n-2p}$, de unde rezultă concluzia..**2p**

b. Presupunem că $H\subseteq M$ este o parte stabilă nevidă a lui $GL_n(\mathbb{R})$, atunci există $A\in H$, de unde $A\in M$.

Dacă H e parte stabilă, atunci prin inducție se demonstrează că $A^k\in H,\forall k\in\mathbb{N}^*$ **1p**

Dacă presupunem că $\det(A)=2^i, i\in\{1,2,...,n\}$, atunci $\det\left(A^k\right)=\left[\det(A)\right]^k=2^{ik}>2^n$, pentru $k\geq n+1$, deci $A^k\notin M\Rightarrow A^k\notin H$, contradicție. Deci orice matrice din H are doar valorile proprii $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ **1p**

Valorile proprii ale matricei $A-2I_2$ sunt nenule deci $\det(A-2I_2)\neq 0$, deci $A-2I_2$ este inversabilă. Cum $A\in M\Rightarrow A^3-A^2-A-2I_n=O_n\Leftrightarrow(A-2I_2)\left(A^2+A+I_n\right)=O_n$, deci $A^2+A+I_n=O_n$. Atunci $A^3-I_n=O_n\Rightarrow A^3=I_n$.

Din faptul că H e parte stabilă $\Rightarrow A^3 \in H \Rightarrow I_n \in H \Rightarrow I_n \in M \Rightarrow I_n^3 - I_n^2 - I_n = 2I_n \Leftrightarrow -I_n = 2I_n$ (F), deci nicio submulțime nevidă a lui M nu este parte stabilă**..2p**

3. Metoda I

Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr natural fixat și $\lambda_k = \dfrac{k}{n}, k = \overline{0,n}$.

Pentru $t < s$ considerăm $x_k = (1-\lambda_k)\cdot t + \lambda_k \cdot s$, oricare ar fi $k \in \{0,1,2,...,n\}$.

Avem $x_{k+1} - x_k = (\lambda_{k+1} - \lambda_k)(s-t) = \dfrac{s-t}{n}$, oricare ar fi $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$.

Din ipoteză, pentru $k \in \{0,1,...,n-1\}$, avem:

$\dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} + |x_{k+1} - x_k| \geq \alpha \Rightarrow n \cdot \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{s-t} + \dfrac{s-t}{n} \geq \alpha$ **...2p**

Prin adunarea acestor inegalități, se obține:

$$\frac{n}{s-t}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) + (s-t) \geq n\alpha \Rightarrow \frac{n}{s-t}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) + (s-t) \geq n\alpha .$$

Cum $x_n = s$ și $x_0 = t$, rezultă $\dfrac{f(s) - f(t)}{s-t} + \dfrac{s-t}{n} \geq \alpha$. Prin trecere la limită, când $n \to \infty$, se obține

$\dfrac{f(s) - f(t)}{s-t} \geq \alpha \Rightarrow f(s) - f(t) \geq \alpha s - \alpha t \Rightarrow f(s) - \alpha s \geq f(t) - \alpha t$, cu $t < s$,

deci funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $h(x) = f(x) - \alpha x$, este strict crescătoare. **..3p**

Cum funcția f admite primitive rezultă că funcția h admite primitive și fiind strict crescătoare este continuă. Deci funcția f este continuă ca sumă de două funcții continue**..2p**

Metoda II

Pentru $x > y$, relația din ipoteză devine:

$$f(x) - f(y) + (x-y)^2 \geq \alpha(x-y) \Leftrightarrow [f(x) - \alpha x] - [f(y) - \alpha y] \geq -x^2 + 2xy - y^2$$

Atunci

$$[f(x) - \alpha x + 2x^2] - [f(y) - \alpha y + 2y^2] \geq x^2 + 2xy - 3y^2$$

Pentru $x, y \geq 0$, avem

$[f(x) - \alpha x + 2x^2] - [f(y) - \alpha y + 2y^2] \geq (x-y)(x+3y) \geq 0$, deci funcția

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \alpha x + 2x^2$ este crescătoare și admite primitive deci este continuă, prin urmare funcția f este continuă pe $[0,\infty)$ ca sumă de trei funcții continue**...3p**

Pentru $x, y \leq 0$, avem

$[f(x) - \alpha x - 2x^2] - [f(y) - \alpha y - 2y^2] \geq -3x^2 + 2xy + y^2 = \underbrace{(y-x)}_{<0}\underbrace{(3x+y)}_{\leq 0} \geq 0$, deci funcția

$h : (-\infty,0] \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) - \alpha x - 2x^2$, este crescătoare și admite primitive, deci este continuă, prin urmare funcția f este continuă pe $(-\infty,0]$, deci va fi continuă pe $\mathbb{R}$ **..4p**