



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SIGMA”

EDIȚIA A XXVIII-A

11.05.2024

Clasa a IX-a

SUBIECT

Subiectul 1.

Fie x_{n-1} , x_n și x_{n+1} termeni consecutivi nenuli ai unei progresii geometrice cu termeni strict pozitivi și rația nenulă, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că inegalitatea

$$\frac{x_{n-1} \cdot x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n \cdot x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}} + \frac{x_{n+1} \cdot x_{n-1}}{x_{n+1} + x_{n-1}} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_{n+1} + x_{n+1} \cdot x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n + x_{n+1}}$$

are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 2.

Fie triunghiul ABC cu $AB = c$, $BC = a$ și $CA = b$, unde $a, b, c \in (0, \infty)$. Fie T centrul de greutate al triunghiului MNT , unde $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, cu $AM = BN = CP$. Arătați că dacă are loc egalitatea $c \cdot \overrightarrow{AT} + a \cdot \overrightarrow{BT} + b \cdot \overrightarrow{CT} = \vec{0}$, atunci ΔABC este triunghi echilateral.

Subiectul 3.

Fie n un număr natural nenul și $P_n(x) = \sqrt{x^2 - nx} + \sqrt{x^2 - n^2} + \sqrt{x^2 + nx} - 3x$, $x \geq n$.

Pentru $x \in \left[n^2 + \frac{1}{3}, \infty\right)$, determinați $[P_n(x)]$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a .

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Timp de lucru 120 de minute