Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023

BAREM DE CORECTARE, CLASA A V-A

Subiectul 1. Știind că $a+b=51$, $b+c=73$ și $c+d=83$, calculați câtul și restul împărțirii numărului $2a+5b+6c+3d$ la $a+d$.

Soluție:

$a+b=51$, $c+d=83$. Prin adunarea celor două relații se obține $a+b+c+d=134$........................**1 p**

Cum $b+c=73 \Rightarrow a+d=61$..**1 p**

$2a+5b+6c+3d=2a+5b+5c+c+d+2d=2(a+d)+5(b+c)+(c+d)=$..............................**2 p**

$=2\cdot 61+5\cdot 73+83=122+365+83=570$..**1 p**

$570=61\cdot 9+21$, deci câtul este 9, iar restul este 21..**2 p**

Subiectul 2. Pentru un număr natural nenul n se notează cu $S(n)$ suma pozitivă

$$S(n)=\pm 1\pm 2\pm 3\pm\cdots\pm(2n)+(2n+1),$$

unde semnele $+$ și $-$ sunt așezate în toate modurile posibile astfel încât $S(n)$ să fie pozitivă.

a) Arătați că $1\leq S(4)\leq 45$.

b) Stabiliți câți teremeni are suma alternantă

$$S(n)=1-2+3-4+5-6+\cdots+(2n-1)-(2n)+(2n+1)$$

astfel încât $S(n)=2023$.

Soluție:

a) Suma $S(4)$ conține 4 termeni numere pare și 5 termeni numere impare,

deci $S(4)$ este un număr impar, rezultă $S(4)>0$ . ...**1 p**

$S(4)=1+2-3+4-5-6+7-8+9$

$S(4)=(9-8)+(7-6)-(5-4)-(3-2)+1=1$ ... .**1 p**

$S(4)=1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ ... ...**1 p**

b) Cum

$$S(n)=1-2+3-4+5-6+\cdots+(2n-1)-(2n)+(2n+1)$$
$$=1+\underbrace{(3-2)+(5-4)+\cdots+[(2n+1)-2n]}_{n\text{ termeni}}$$

rezultă

$$S(n)=n+1 \text{ ....} \textbf{2 p}$$

Din $S(n)=n+1=2023$ se obține $n=2022$, ...**1 p**

deci suma alternantă are 4045 de termeni. ... ...**1 p**

Subiectul 3. Suma a două numere este 168. Aflați cele două numere știind că, dacă se șterge o cifră a unuia dintre numere, se obține celălalt număr.

Soluție:

Unul dintre numere are trei cifre, iar celălalt este format din două cifre. Numărul de trei cifrelor are cifra sutelor 1..**1 p**

Cazul I: $\overline{1ab}+\overline{ab}=168 \Rightarrow 100+2\overline{ab}=168 \Rightarrow \overline{ab}=34$, celălalt număr este 134.................................. **2 p**

Cazul II: $\overline{1ab}+\overline{1b}=168 \Rightarrow \overline{ab}+b=58 \Rightarrow 10a+2b=58 \Rightarrow 5a+b=29$

$\Rightarrow a=5, b=4$ sau $\Rightarrow a=4, b=9$, numerele sunt 154 și 14 sau 149 și 19...**2 p**

Cazul III: $\overline{1ab}+\overline{1a}=168 \Rightarrow \overline{ab}+a=58 \Rightarrow 11a+b=58 \Rightarrow a=5, b=3$, iar numerele sunt 153 și 15......**2 p**

Soluțiile sunt

$$(134,34), (154,14), (149,19), (153,15)$$

Subiectul 4.

a) Fie 45 de numere naturale nenule distincte, mai mici sau egale cu 80. Arătați că există două dintre acestea cu diferența egală cu 9.

b) Rămâne afirmația precedentă valabilă în cazul în care luăm doar 44 de numere?

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2023

Soluție:

a) De la 1 la 80 avem

8 numere care împărțite la 9 dau restul 0

9 numere care împărțite la 9 dau restul *r*, unde *r* este orice număr natural de la 1 la 8 ....**1 p**

Presupunem că nu există două numere a căror diferență să fie egală cu 9...**1 p**

Atunci putem avea

cel mult 4 perechi de numere a căror diferență prin împărțirea la 9 dau restul 0

și cel mult 5 perechi de numere a căror diferență prin împărțirea la 9 dau restul *r*, unde *r* este un număr natural de la 1 la 8.

În total putem avea $4+5\cdot 8=44$ de numere , deci presupunerea făcută este falsă...................... .... **2 p**

b) Nu, afirmația nu rămâne adevărată...**1 p**

Deoarece, pentru orice alegere a 10 numere, există două numere a căror diferență se împarte exact la 9, pentru ca diferența lor să fie diferită de 9, este necesar ca aceasta să fie 18 ... ...**1 p**

Este posibilă următoarea alegere a numerelor

1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7, 8, 9 (avem 9 numere)

19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 27 (avem 9 numere)

37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 (avem 9 numere)

55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63 (avem 9 numere)

73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80 (avem 8 numere)

În total avem $9\cdot 4+8=44$ de numere pentru care diferența oricăror două numere nu este egală cu 9.........**1 p**