Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023

BAREM DE CORECTARE, CLASA A VII-A

Subiectul 1. Numerele naturale nenule x, y, z verifică relația $\dfrac{2x}{3y+4z}=\dfrac{3y}{4z+2x}=\dfrac{4z}{2x+3y}$.

a. Arătați că $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3}$.

b. Aflați cele mai mici valori x, y, z pentru care $\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}}\in\mathbb{Q}$.

Soluție:

a. $\dfrac{2x}{3y+4z}=\dfrac{3y}{4z+2x}=\dfrac{4z}{2x+3y}\Rightarrow\dfrac{2x}{2x+3y+4z}=\dfrac{3y}{2x+3y+4z}=\dfrac{4z}{2x+3y+4z}\Rightarrow 2x=3y=4z$

$\Rightarrow\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3}$. 2p

b. Fie $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{3}=k\in\mathbb{Q}^*$. Deoarece $3y=4z\Rightarrow 4|3y$ și cum $(4,3)=1\Rightarrow 4|y\Rightarrow\dfrac{y}{4}=k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow x=6k, y=4k, z=3k, k\in\mathbb{N}^*$. 1p

Atunci $\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{1}{z^3}}=\sqrt{\dfrac{1}{216k^3}+\dfrac{1}{64k^3}+\dfrac{1}{27k^3}}=\sqrt{\dfrac{99}{2^6\cdot 3^3\cdot k^3}}=\sqrt{\dfrac{11}{2^6\cdot 3\cdot k^3}}=\dfrac{1}{8k}\sqrt{\dfrac{11}{3\cdot k}}=$

$=\dfrac{1}{8k}\cdot\dfrac{11}{\sqrt{3\cdot 11\cdot k}}\in\mathbb{Q}$ 2p

$\Rightarrow\sqrt{33\cdot k}\in\mathbb{Q}\Rightarrow k=33\cdot t^2, t\in\mathbb{N}^*, k-\text{minim}\Rightarrow t=1\Rightarrow k=33\Rightarrow x=198, y=132, z=99$. 2p

Subiectul 2. Aflați numerele prime *p* și *q* de două cifre pentru care $p\cdot q+1$ este pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr. 3/2023

Soluție:

Cum *p* și *q* sunt numere prime de două cifre $\Rightarrow p, q-$ impare; Presupunem că $p\le q$.

Din $p\cdot q+1=n^2\Rightarrow pq=(n-1)(n+1)$. 2p

Cum *p* și *q* prime $\Rightarrow p=n-1$ și $q=n+1\Rightarrow q-p=2\Rightarrow q=p+2$. 2p

Numerele căutate sunt: $(p,q)\in\{(11;13);(17;19);(29;31);(41;43);(59;61);(71;73)\}$ și luând și simetricele acestora, obținem 12 perechi ca în enunț. 3p

Subiectul 3. Se consideră paralelogramul *ABCD* și punctele $M\in(AB), N\in(CD)$ astfel încât $MA=MB$ și $NC=ND$. Punctul *P* este simetricul lui *M* față de *B*, $AN\cap CP=\{Q\}$ și $BN\cap CM=\{G\}$.

a. Arătați că patrulaterul *NGCQ* este paralelogram.

b. Arătați că punctul G este centrul de greutate al ΔAPQ.

Soluție:

a. ABCD este paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ și $AB = CD \Rightarrow BM \parallel CN$ și $BM = CN \Rightarrow BCNM$ este paralelogram $\Rightarrow G$ este mijlocul lui $[BN]$ și al lui $[CM]$. 1p

$[BG]$ este linie mijlocie în $\Delta MPC \Rightarrow BG \parallel PC \Rightarrow NG \parallel CQ$ **(1)**

$[MG]$ este linie mijlocie în $\Delta ABN \Rightarrow MG \parallel AN \Rightarrow CG \parallel NQ$ **(2)**

Din **(1)** și **(2)** rezultă $NGCQ$ este paralelogram. 2p

b. Fie $NC \cap QG = \{S\} \Rightarrow SQ = SG$. **(3)**

Fie R mijlocul lui $[BM]$ și cum $AM = BP \Rightarrow R$ este mijlocul lui $[AP]$. 1p

$[SG]$ este linie mijlocie în $\Delta MNC \Rightarrow SG \parallel MN, SG = \frac{MN}{2}$ **(4)**

$[GR]$ este linie mijlocie în $\Delta MBN \Rightarrow GR \parallel MN, GR = \frac{MN}{2}$ **(5)** 1p

Din **(4)** și **(5)** $\Rightarrow Q, S, G, R$ sunt coliniare și $SG = GR \overset{(3)}{=} SQ \Rightarrow G$ este centrul de greutate al ΔAPQ. 2p

Subiectul 4. Se consideră rombul $ABCD$. Punctul I este centrul cercului înscris în ΔABC.

a. Arătați că $\sphericalangle AIC = 90° + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ABC$.

b. Dacă $AB + BI = AC$, arătați că patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

Soluție:

a. Din $ABCD$ romb, avem că $AB = BC$, deci ΔABC este isoscel.

Punctul I este centrul cercului înscris $\Rightarrow \sphericalangle BAI = \sphericalangle IAC = \sphericalangle BCI = \sphericalangle ACI = a$. În ΔABC, avem

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA = 180° \Rightarrow \sphericalangle ABC + 4a = 180° \Rightarrow a = \frac{180° - \sphericalangle ABC}{4}$. **(1)**

În $\Delta AIC, \sphericalangle AIC = 180° - (\sphericalangle IAC + \sphericalangle ICA) = 180° - 2a \overset{(1)}{\Rightarrow} \sphericalangle AIC = 90° + \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. ……………………........…..2p

b. Prelungim $[AB]$ cu $[BE] \equiv [BI] \Rightarrow AC = AB + BI = AB + BE = AE$. 1p

ΔBIE este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle BEI = \sphericalangle BIE$.

$\Delta AIE \equiv \Delta AIC (L.U.L.) \Rightarrow \sphericalangle AEI = \sphericalangle ICA = a$ și $\sphericalangle AIE = \sphericalangle AIC \overset{a.}{=} 90° + \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. **(2)**

…………….......……1p

În $\Delta AIE, \sphericalangle AIE = 180° - 2a$, iar în $\Delta BIE, \sphericalangle IBE = 180° - 2a$. Deci $\sphericalangle AIE = \sphericalangle IBE \Rightarrow$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \sphericalangle IBE = 90° + \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. **(3)** 1p

Dar $\sphericalangle IBE = \sphericalangle IBC + \sphericalangle CBE = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBE$. **(4)** …………………........…………………………1p

Din **(3)** și **(4)** rezultă $\sphericalangle CBE = 90° \Rightarrow \sphericalangle ABC = 90° \overset{ABCD-\text{ romb}}{\Longrightarrow} ABCD -$ pătrat. 1p