Colegiul Național „Vasile Lucaciu”

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023

BAREM DE CORECTARE, CLASA A VIII-A

Subiectul 1.
Determinați $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x - 3y + 4 = 0$ și $\sqrt{x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4} \in \mathbb{Q}$.
Soluție:
Cu $x = 3y - 4$ se obține

$$x^2 + 7y^2 + 8x + 8y + 4 = 16y^2 + 8y - 12$$ **(1 p)**

Dacă $\sqrt{16y^2 + 8y - 12} = \sqrt{(4y+1)^2 - 13} \in \mathbb{Q}$, **(1 p)**
atunci există $k \in \mathbb{Z}_+$ pentru care $(4y+1)^2 - 13 = k^2$ **(1 p)**
Atunci

$$(4y + 1 + k)(4y + 1 - k) = 13$$ **(1 p)**

Din $(4y + 1 + k)(4y + 1 - k) = 13 \cdot 1$ se obține $y = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ **(1 p)**
Din $(4y + 1 + k)(4y + 1 - k) = (-1) \cdot (-13)$ se obține $y = -2$ și $x = -10$ **(1 p)**
Soluția $(x, y) = (-10, -2)$. **(1 p)**

Subiectul 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\left[\frac{4x}{x^2+1}\right] \cdot \left\{\frac{4x + 3x^2 + 3}{x^2+1}\right\} + \left[\frac{2(x+1)^2}{x^2+1}\right] = \frac{8x}{x^2+1},$$

unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Gazeta Matematică

Soluție.

$$\frac{4x + 3x^2 + 3}{x^2+1} = 3 + \frac{4x}{x^2+1}$$
$$\frac{2(x+1)^2}{x^2+1} = 2 + \frac{4x}{x^2+1}$$ **(1 p)**

Cu notația $a = \frac{4x}{x^2+1}$ ecuația inițială devine

$$[a] \cdot \{a\} + 2 + [a] = 2a$$ **(1 p)**

ceea ce implică $2(1 - \{a\}) = [a] \cdot (1 - \{a\})$ **(1 p)**
Cum $\{a\} \neq 1$ rezultă $[a] = 2$ **(1 p)**
Din $2 \leq \frac{4x}{x^2+1} < 3$, cu $x^2 + 1 > 0$ se obține

$$2x^2 + 2 \leq 4x < 3x^2 + 3$$ **(1 p)**

Inegalitatea $4x < 3x^2 + 3 \Leftrightarrow 0 < 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$ implică $x \in \mathbb{R}$ **(1 p)**
Inegalitatea $2x^2 + 2 \leq 4x \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0$ implică $x = 1$ **(1 p)**
Soluție

$$x = 1$$

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Subiectul 3. Fie H ortocentrul și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Picioarele înălțimilor duse din B și C sunt punctele E, respectiv F. Punctul M este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $D \in \mathcal{C}(O, OA)$ este punctul diametral opus punctului A.

a) Arătați că patrulaterul $HBDC$ este paralelogram.

b) Arătați că $AH = 2 \cdot OM$.

Soluție.

a)

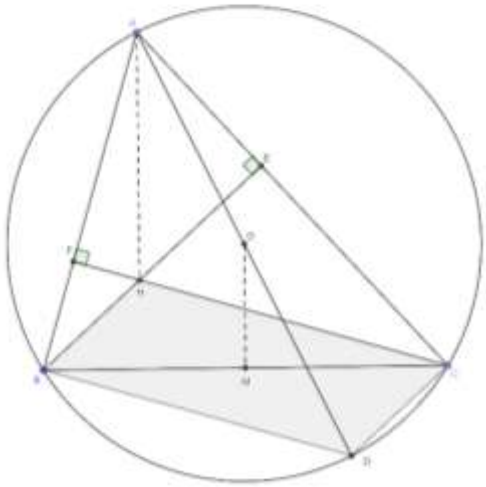
Din $[AD]$ diametru rezultă

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90^\circ$$ **(1 p)**

Din $DC \perp AC$ și $BH \perp AC$ rezultă $BH \parallel CD$ **(1 p)**

Din $DB \perp AB$ și $CH \perp AB$ rezultă $CH \parallel BD$ **(1 p)**

Deci $HBDC$ paralelogram (laturi paralele două câte două). **(1 p)**



b)

Din $HBDC$ paralelogram, avem că $HM = MD$ **(1 p)**

Din $[AD]$ diametru, avem $AO = OD$ **(1 p)**

Atunci OM este linie mijlocie în triunghiul AHD, deci $AH = 2 \cdot OM$ **(1 p)**

Subiectul 4. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful V. Planul α conține muchia AB și taie muchiile CV și DV în punctul M, respectiv N.

a) Arătați că dacă $(BM$ este bisectoarea unghiului VBC, atunci

$$VB = \frac{AB \cdot MN}{AB - MN}.$$

b) Arătați că $\mathcal{A}_{\Delta VBM} = \sqrt{\mathcal{A}_{\Delta VAB} \cdot \mathcal{A}_{\Delta VMN}}$

Soluție.

a) Din $AB \parallel (VDC)$ și $MN \subset (VDC)$ rezultă $AB \cap MN = \emptyset$

dar AB și MN sunt coplanare, deci $AB \parallel MN$ **(0,5 p)**

Din $ABCD$ pătrat, avem $AB \parallel CD$, deci $MN \parallel CD$ **(0,5 p)**

În ΔVDC, din Teorema fundamentală a asemănării, rezultă

$$\frac{VM}{MC} = \frac{MN}{DC - MN}$$ **(0,5 p)**

În ΔVBC, din Teorema bisectoarei, rezultă

$$\frac{VM}{MC} = \frac{VB}{BC}$$ **(0,5 p)**

Finalizare $VB = \frac{AB \cdot MN}{AB - MN}$ **(1 p)**

b) Din $MN \parallel DC$ se obține $\Delta VMN \simeq \Delta VCD$. Dacă $\frac{VM}{VC} = k$, atunci

$$\mathcal{A}_{\Delta VMN} = k^2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta VDC} = k^2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta VAB}$$ **(1 p)**

Rezultă $\sqrt{\mathcal{A}_{\Delta VAB} \cdot \mathcal{A}_{\Delta VMN}} = k \cdot \mathcal{A}_{\Delta VAB} = k \cdot \mathcal{A}_{\Delta VBC}$ **(1 p)**

Dacă $\frac{VM}{VC} = k$, atunci $\mathcal{A}_{\Delta VBM} = k \cdot \mathcal{A}_{\Delta VBC}$ **(1 p)**

Finalizare $\mathcal{A}_{\Delta VBM} = \sqrt{\mathcal{A}_{\Delta VAB} \cdot \mathcal{A}_{\Delta VMN}}$ **(1 p)**

COLEGIUL NAȚIONAL VASILE LUCACIU

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro