Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023

BAREM DE CORECTARE, CLASA A IX-A

Subiectul 1. Se consideră ecuația $(ax-b)^2+(bx-a)^2=x,\ a,b\in\mathbb{Z}^*$, care admite o soluție număr întreg.

a. Arătați că $a=b$.

b. Rezolvați ecuația.

Soluție:

a. După efectuarea calculelor ecuația devine $\left(a^2+b^2\right)x^2-x(4ab+1)+a^2+b^2=0$. 1p

Ecuația admite soluții reale $\Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow \Delta=(4ab+1)^2-4\left(a^2+b^2\right)^2\ge 0\Leftrightarrow$

$\Delta=\left[1-2(a-b)^2\right]\cdot\left[1+2(a+b)^2\right]\ge 0\Rightarrow 1-2(a-b)^2\ge 0\Rightarrow \underbrace{(a-b)^2}_{\in\mathbb{N}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow a=b$. 2p

b. Cum $(ax-b)^2+(bx-a)^2\ge 0\Rightarrow x\ge 0$, deci soluția număr întreg este chiar număr natural. 1p

Pentru $a=b$ ecuația devine: $2a^2x^2-x\left(4a^2+1\right)+2a^2=0$. Fie x_1,x_2 soluțiile ecuației, cu $x_1\in\mathbb{N}$. DinViète,

avem $x_1+x_2=2+\frac{1}{2a^2}$ și $x_1x_2=1\Rightarrow x_1+\frac{1}{x_1}=2+\frac{1}{2a^2}$. 1p

Cum $x=0$ și $x=1$ nu sunt soluții , avem că $x_1\ge 2$.

$a\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow a^2\ge 1\Rightarrow x_1+\frac{1}{x_1}=2+\frac{1}{2a^2}\le 2+\frac{1}{2}<3$. 1p

Deci $2\le x_1+\frac{1}{x_1}<3$ și cum $x_1\in\mathbb{N}\Rightarrow x_1=2,x_2=\frac{1}{2}\Rightarrow 2+\frac{1}{2a^2}=2+\frac{1}{2}\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1$. 1p

Subiectul 2. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că $\left[\sqrt{n^2+an+b}\right]=n+1,\forall n\in\mathbb{N}$, unde prin $[x]$ se înțelege partea întreagă a numărului real x.

Gazeta Matematică nr. 1/2023

Soluție:

$n=0\Rightarrow\left[\sqrt{b}\right]=1\Rightarrow 1\le\sqrt{b}<2\Rightarrow b\in[1,4)$. 1p

Din $\left[\sqrt{n^2+an+b}\right]=n+1\Rightarrow n+1\le\sqrt{n^2+an+b}<n+2\Rightarrow(n+1)^2\le n^2+an+b<(n+2)^2$

$\Rightarrow 1-b\le(a-2)n,\forall n\in\mathbb{N}$ **(1)** și $b-4<(4-a)n,\forall n\in\mathbb{N}$. **(2)** 1p

Dacă $a<2$, inegalitatea **(1)** este echivalentă cu $n\le\frac{1-b}{a-2},\forall n\in\mathbb{N}$, fals. 1p

Dacă $a>4$, inegalitatea **(2)** este echivalentă cu $n<\dfrac{b-4}{4-a}, \forall n\in\mathbb{N}$, fals. 1p

Cazul I. $a=2$. Relațiile **(1)** și **(2)** devin $\begin{cases}1-b\le 0\\ b-4<2n, \forall n\in\mathbb{N}\end{cases} \Leftrightarrow b\in[1,4)$. 1p

Cazul II. $a=4$. Relațiile **(1)** și **(2)** devin $\begin{cases}\dfrac{1-b}{2}\le n, \forall n\in\mathbb{N}\\ b-4<0\end{cases} \Leftrightarrow b\in[1,4)$. 1p

Cazul III. $a\in(2,4)$. Relațiile **(1)** și **(2)** devin $\begin{cases}\dfrac{1-b}{a-2}\le n, \forall n\in\mathbb{N}\\ \dfrac{b-4}{4-a}<n\ , \forall n\in\mathbb{N}\end{cases} \Leftrightarrow b\in[1,4)$.

Convin perechile (a,b) cu $a\in[2,4], b\in[1,4)$. ………………………………………………………..1p

Subiectul 3. Pe laturile ΔABC se consideră punctele *M, N, P* astfel încât $\overrightarrow{AM}=m\cdot\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN}=n\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=p\cdot\overrightarrow{CA}$. Demonstrați că centrul de greutate al triunghiului ΔMNP aparține medianei din *A* a ΔABC dacă și numai dacă $2n=m+p$.

Soluție:

Fie *G* centrul de greutate al ΔMNP și AA' mediana din *A*.

Avem $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}\right)$. ……………………………………………………………………1p

$\dfrac{CP}{CA}=p\Rightarrow\dfrac{AP}{CA}=1-p\Rightarrow\overrightarrow{AP}=(1-p)\overrightarrow{AC}$

$\dfrac{BN}{BC}=n\Rightarrow\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{n}{1-n}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=(1-n)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\left((m-n+1)\overrightarrow{AB}+(1-p+n)\overrightarrow{AC}\right)$ …………3p

$\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ ………………………………………………………………………………1p

$G\in AA'\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}$ și $\overrightarrow{AA'}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow\dfrac{\frac{m-n+1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1-p+n}{3}}{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow m-n+1=1-p+n\Leftrightarrow m+p=2n$. ……2p

Subiectul 4.

a. Arătați că pentru orice numere reale $a,b,c\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$2a^2+(b+c)^2\ge\frac{(2a+b+c)^2}{3}.$$

b. Fie $a,b,c>0$. Demonstrați că

$$\frac{2a^2+(b+c)^2}{ab+bc}+\frac{2b^2+(c+a)^2}{bc+ca}+\frac{2c^2+(a+b)^2}{ca+ab}>8.$$

student Robert Rogozsan

Soluție:

a. $3\left(2a^2+(b+c)^2\right)\ge(2a+b+c)^2\Leftrightarrow(b+c-a)^2\ge 0$. ………………………………………….2p

b. Avem

$$\frac{2a^2+(b+c)^2}{ab+bc}+\frac{2b^2+(c+a)^2}{bc+ca}+\frac{2c^2+(a+b)^2}{ca+ab}\geq\frac{(2a+b+c)^2}{3(ab+bc)}+\frac{(2b+c+a)^2}{3(bc+ca)}+\frac{(2c+a+b)^2}{3(ca+ab)}\overset{T.A.}{\geq}$$

$$\geq\frac{(4(a+b+c))^2}{6(ab+bc+ca)}=\frac{16(a+b+c)^2}{6(ab+bc+ca)}.$$ 2p

Întrucât $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ **(*)** vom avea

$$\frac{16(a+b+c)^2}{6(ab+bc+ca)}=\frac{8\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)}{3(ab+bc+ca)}\geq\frac{8\cdot 3(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)}=8.$$ 2p

Egalitatea nu are loc. 1p

Colegiul Național Vasile Lucaciu

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282

Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630

Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro