Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023

BAREM DE CORECTARE, CLASA A X-A

Subiectul 1.

a) Arătați că pentru orice $u, v \in \mathbb{C}^*$, cu $|u| = |v|$, are loc egalitatea

$$\frac{u}{v} = \frac{\bar{v}}{\bar{u}}.$$

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ trei numere complexe nenule, cu $|a| = |b| = |c|$.

Arătați că dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are o soluție de modul egal cu 1, atunci $b^2 = ac$.

Soluție:

a)

$\frac{u}{v} = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \Leftrightarrow u \cdot \bar{u} = v \cdot \bar{v} \Leftrightarrow |u|^2 = |v|^2$ **(1 p)**

b)

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ soluțiile ecuației, cu $|z_1| = 1$. **(1 p)**

Din $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$ se obține $\left|\frac{c}{a}\right| = 1 = |z_1| \cdot |z_2|$, deci $|z_2| = 1$. **(1 p)**

Avem

$$\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} = \overline{z_2} + \overline{z_1}$$

(1 p)

Cum

$$-\overline{\left(\frac{b}{a}\right)} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

(1 p)

se obține

$$\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = -\frac{a}{b}$$

(1 p)

de unde rezultă $b^2 = ac$ **(1 p)**

Subiectul 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că f este injectivă dacă și numai dacă $a^2 \leq 3b$.

Gazeta Matematică

Soluție.

$f(x) - f(y) = (x - y)[x^2 + (a + y)x + y^2 + ay + b]$ **(1 p)**

Pentru ecuația în x

$x^2 + (a + y)x + y^2 + ay + b = 0$ se obține discriminantul

$\Delta_1 = -3y^2 - 2ay + a^2 - 4b$ **(1 p)**

Pentru ecuația în y

$-3y^2 - 2ay + a^2 - 4b = 0$ se obține discriminantul

$\Delta_2 = 16(a^2 - 3b)$ **(1 p)**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

„⇒” Dacă f este o funcție injectivă, atunci $\Delta_1 < 0$ oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$, deci $\Delta_2 \leq 0$, ceea ce revine la $a^2 \leq 3b$ **(2 p)**

„⇐” Dacă $a^2 \leq 3b$, atunci $\Delta_2 \leq 0$, ceea ce implică $-3y^2 - 2ay + a^2 - 4b < 0$ oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$, deci $x^2 + (a+y)x + y^2 + ay + b > 0$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
Atunci ecuația $f(x) - f(y) = 0$ admite unica soluție $x = y$, ceea ce implică faptul că funcția f este injectivă. **(2 p)**

Subiectul 3. a) Fie $a \in (1, \infty)$ și funcția $f: \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(n) = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a^{-1}}$. Arătați că funcția f este monotonă.
b) Determinați numărul natural $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ pentru care are loc egalitatea

$$\sqrt[n]{5\sqrt{13} + 18} + \sqrt[n]{5\sqrt{13} - 18} = \sqrt{13}$$

Andrei Horvat-Marc

Soluție.

a)

$$f(n) - f(n+1) = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} + \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - \frac{1}{\sqrt[n+1]{a}}$$ **(1 p)**

$$f(n) - f(n+1) = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} - \sqrt[n(n+1)]{a^n} + \frac{\sqrt[n(n+1)]{a^n} - \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}}}{\sqrt[n(n+1)]{a^{2n+1}}}$$ **(1 p)**

$$f(n) - f(n+1) = \left(\sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} - \sqrt[n(n+1)]{a^n}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n(n+1)]{a^{2n+1}}}\right)$$ **(1 p)**

Cum $a \in (1, \infty)$ avem $\sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} - \sqrt[n(n+1)]{a^n} > 0$ și $\frac{1}{\sqrt[n(n+1)]{a^{2n+1}}} < 1$, deci

$f(n) - f(n+1) > 0$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, ceea ce implică faptul că funcția f este strict descrescătoare, deci monotonă. **(1 p)**

b)

Arată că

$$\left(5\sqrt{13} + 8\right)\left(5\sqrt{13} - 8\right) = 1$$ **(1 p)**

$$\sqrt[3]{5\sqrt{13} + 18} + \sqrt[3]{5\sqrt{13} - 18} = \sqrt{13}$$ **(1 p)**

Pentru $a = 5\sqrt{13} + 18$, avem $\sqrt[n]{5\sqrt{13} + 18} + \sqrt[n]{5\sqrt{13} - 18} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a^{-1}}$, deci comform a), ecuația $f(n) = \sqrt{13}$ are soluția unică $n = 3$. **(1 p)**

Subiectul 4. Fie $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu $|\omega| \neq 1$. Arătați că funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = z + \omega \cdot \bar{z}$ este inversabilă.

Soluție.

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$f(z_1) - f(z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2) + \omega(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 0$ **(1 p)**

Cum $(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{\omega}(z_1 - z_2) = 0$ **(0,5 p)**

se obține $(z_1 - z_2)(1 - |\omega|^2) = 0$, **(1 p)**

de unde rezultă $z_1 = z_2$, deci f este injectivă. **(0,5 p)**

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Fie $u \in \mathbb{C}$. Egalitatea $f(z) = u$ implică

$$z + \omega \cdot \bar{z} = u$$ **(1 p)**

Cum

$$\bar{z} + \bar{\omega} \cdot z = \bar{u}$$ **(0,5 p)**

se obține $z(1 - |\omega|^2) = u - \omega \cdot \bar{u}$, deci

$$z = \frac{1}{1 - |\omega|^2} \cdot (u - \omega \cdot \bar{u}) \in \mathbb{C}$$ **(1 p)**

ceea ce implică faptul că funcția f este surjectivă. **(0,5 p)**

Finalizare **(1 p)**