Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023

BAREM DE CORECTARE, CLASA A XI-A

Subiectul 1. Se consideră matricea $F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Arătați că:

a) $F^2-F-2I_2=O_2$;

b) $I_2+F+F^2+...+F^n=\frac{1}{2}\left(F^{n+2}-F\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $F^2=F\cdot F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$F^2-F-2I_2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$ ....**2 p**

b) Demonstrăm prin metoda inducției matematice

Pentru $n=1$ avem: $I_2+F=\frac{1}{2}\left(F^3-F\right)\Leftrightarrow 2I_2+2F=F^3-F\Leftrightarrow F^3=2I_2+3F$

Conform punctului **a)** $F^2=F+2I_2\,\big|\cdot F\Rightarrow F^3=F^2+2F\overset{a)}{\Rightarrow}F^3=2I_2+3F$, deci propoziția este adevărată pentru $n=1$ ....**2 p**

Presupunem că $I_2+F+F^2+...+F^k=\frac{1}{2}\left(F^{k+2}-F\right)$ este adevărată, unde $k\in\mathbb{N}^*$, fixat, și demonstrăm că

$I_2+F+F^2+...+F^{k+1}=\frac{1}{2}\left(F^{k+3}-F\right)$ este adevărată.

$I_2+F+F^2+...+F^{k+1}=I_2+F\cdot\left(I_2+F+F^2+...+F^k\right)=I_2+F\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(F^{k+2}-F\right)=$

$=I_2+\frac{1}{2}\cdot\left(F^{k+3}-F^2\right)\overset{a)}{=}I_2+\frac{1}{2}\cdot\left(F^{k+3}-F-2I_2\right)=I_2+\frac{1}{2}\cdot\left(F^{k+3}-F\right)-I_2=\frac{1}{2}\cdot\left(F^{k+3}-F\right)$

Deci propoziția este adevărată pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ....**3 p**

Subiectul 2. Fie matricea $A\in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3=O_n$, cu $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Fie $Y\in M_n(\mathbb{R})$ o soluție a ecuației matriceale $X+AX+XA^2=A$.

a) Arătați egalitatea $A^2\left(X+AX+XA^2\right)A^2=A^2XA^2$, pentru orice matrice $X\in M_n(\mathbb{R})$;

b) Arătați că $AYA=O_n$;

c) Știind că ecuația $X+AX+XA^2=A$ are soluția unică $X_0\in M_n(\mathbb{R})$, determinați X_0 în funcție de matricea A.

doctorand Mihai Zelina

Soluție:

a)

$A^2(X+AX+XA^2)A^2 = A^2XA^2 + A^3XA^2 + A^2XA^4 = A^2XA^2 + O_nXA^2 + A^2XAO_3 =$

$= A^2XA^2$ ....**1 p**

b) din **a)** deducem că egalitatea $A^2(Y+AY+YA^2)A^2 = A^2YA^2$ implică $A^5 = A^2YA^2$, deci

$A^2YA^2 = O_n$ ....**1 p**

Din $A^2(Y+AY+YA^2) = A^2 \cdot A$ se deduce $A^2Y + A^3Y + A^2YA^2 = O_n$, deci $A^2Y = O_n$ ....**1 p**

Din egalitatea $A(Y+AY+YA^2)A = A\cdot A\cdot A$ se deduce $AYA + A^2YA + AYA^3 = O_n$, deci

$AYA = O_n$ ....**1 p**

c) Din $(X_0 + AX_0 + X_0A^2)A^2 = A\cdot A^2 \Leftrightarrow X_0A^2 + AX_0A^2 + X_0A^4 = O_n$ se obține

$X_0A^2 = O_n$ ....**1 p**

Din $A(X_0 + AX_0 + X_0A^2) = A\cdot A \Leftrightarrow AX_0 + A^2X_0 + AX_0A^2 = A^2$ se obține

$AX_0 = A^2$ ....**1 p**

Acum din $X_0 + AX_0 + X_0A^2 = A$ se obține $X_0 + A^2 = A$, deci $X_0 = A - A^2$ ....**1 p**

Subiectul 3. Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Considerăm șirul de numere reale $(a_n)_{n\ge 1}$ definit prin relația de recurență $a_{n+1}\cdot a_n - 1 = k(a_n+1),\quad n\ge 1$, cu $a_1 > k+1$.

a) Determinați limita șirului $(a_n)_{n\ge1}$.

b) Determinați valoarea maximă a numărului real $\alpha\in(0,\infty)$ astfel încât inegalitatea

$$\sqrt{x^2+a_1^2}+\sqrt{x^2+a_2^2}+\sqrt{x^2+a_3^2}+\ldots+\sqrt{x^2+a_{2n}^2} > 2n\sqrt{x^2+\alpha^2}$$

are loc pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$.

masterand Paul Zelina

Soluție:

a) $a_{n+1} = k + \dfrac{k+1}{a_n} > k$ ....**0,5 p**

$\dfrac{|a_{n+1}-(k+1)|}{|a_n-(k+1)|} = \dfrac{1}{a_n} < \dfrac{1}{k}, \forall n\ge 1$ ....**0,5 p**

$\prod_{i=1}^{n-1}\left|\dfrac{a_{i+1}-(k+1)}{a_i-(k+1)}\right| < \dfrac{1}{k^{n-1}}$ ....**1 p**

$|a_n-(k+1)| < |a_1-(k+1)|\cdot\dfrac{1}{k^{n-1}}$ ....**1 p**

$\lim_{n\to\infty}|a_n-(k+1)| \le |a_1-(k+1)|\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{k^{n-1}} = 0$ ....**0,5 p**

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k+1$ ....**0,5 p**

b) $\sqrt{x^2+\alpha^2} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+a_1^2}+\sqrt{x^2+a_2^2}+\sqrt{x^2+a_3^2}+...+\sqrt{x^2+a_{2n}^2}}{2n} = \sqrt{x^2+(k+1)^2}$

$\alpha \le k+1$..**1 p**

Arată că $\alpha = k+1$ verifică inegalitatea dată, folosind inegalitatea

$\sqrt{x^2+a_{2p-1}^2}+\sqrt{x^2+a_{2p}^2} > 2\sqrt{x^2+(k+1)^2}, \forall p=\overline{1,n}$

și finalizare ....**2 p**

Subiectul 4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit recurent prin $x_0 = \dfrac{3}{4}$ și $x_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că $\dfrac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = \sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{2^{n+1}} = 7$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2023, enunț modificat.

Soluție:

a) $x_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{x_n} \Rightarrow \dfrac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = \dfrac{x_n-1+\sqrt{1-x_n^2}}{x_n+1-\sqrt{1-x_n^2}} \Rightarrow$

$\dfrac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{1-x_n^2}-(1-x_n)}{1+x_n-\sqrt{1-x_n^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x_n}\left(\sqrt{1+x_n}-\sqrt{1-x_n}\right)}{\sqrt{1+x_n}\left(\sqrt{1+x_n}-\sqrt{1-x_n}\right)} \Rightarrow \dfrac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = \sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}$ ....**2 p**

b) Notăm $y_n = \dfrac{1-x_n}{1+x_n}$. Atunci $y_1 = \sqrt{y_0}$, $y_2 = \sqrt{y_1} = \sqrt[4]{y_0}$ și, inductiv$\Rightarrow y_n = \sqrt[2^n]{y_0}$ ....**1 p**

$y_0 = \dfrac{1-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow y_n = \dfrac{1}{\sqrt[2^n]{7}}$. Cum $\dfrac{1-x_n}{1+x_n} = \dfrac{1}{7^{\frac{1}{2^n}}} \Rightarrow x_n = \dfrac{7^{\frac{1}{2^n}}-1}{1+7^{\frac{1}{2^n}}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ....**2 p**

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{2^{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}x_n}$. Cum

$\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}\cdot x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}\cdot\dfrac{7^{\frac{1}{2^n}}-1}{1+7^{\frac{1}{2^n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+7^{\frac{1}{2^n}}}\cdot 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{\frac{1}{2^n}}-1}{\dfrac{1}{2^n}} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln 7 = \ln 7$ ....**1 p**

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{2^{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n+1}x_n} = e^{\ln 7} = 7$ ....**1 p**