Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"

ediția a XVI-a, Baia Mare, 25 noiembrie 2023

BAREM DE CORECTARE, CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $f:\mathbb{R}\to[1,\infty)$ o funcție care are primitive și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa.

a) Demonstrați că funcția *F* este bijectivă.

b) Dacă $F(0)=0$, demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{1}{k}\right)$ este divergent.

Soluție: a) $F'(x)=f(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, deci *F* este strict crescătoare, așadar *F* este injectivă. **1p**

Dacă $x>0$, din teorema lui Lagrange rezultă că există $c_x\in(0,x)$, astfel încât $F(x)-F(0)=x\cdot f(c_x)$ **1p**

Cum pentru orice $x>0$, $F(x)=x\cdot f(c_x)+F(0)\geq x+F(0)$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$ **1p**

Dacă $x<0$, aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul $(x,0)$, rezultă analog că $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$ **1p**

F este continuă, așadar $\operatorname{Im}F=\mathbb{R}$, deci *F* este surjectivă. Fiind și injectivă, funcția *F* este bijectivă **1p**

b) Cum pentru orice $x>0$, $F(x)=x\cdot f(c_x)+F(0)\geq x$, rezultă că pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$, $F\left(\frac{1}{k}\right)\geq\frac{1}{k}$ **1p**

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}F\left(\frac{1}{k}\right)\geq\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. **1p**

Subiectul 2. Determinați funcțiile primitivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pentru care

$$\sin^2 x\cdot f(x)+f(\operatorname{tg}x)=f(x),\ \forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Soluție: Avem $f(\operatorname{tg}x)=\left(1-\sin^2 x\right)f(x)$, deci $\frac{1}{\cos^2 x}\cdot f(\operatorname{tg}x)=f(x)$, $\forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. (1) **1p**

Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției *f*. Relația (1) se rescrie $\left(F(\operatorname{tg}x)\right)'=F'(x)$, $\forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **1p**

deci există $c\in\mathbb{R}$, astfel încât $F(\operatorname{tg}x)=F(x)+c$, $\forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Luând $x=0$, obținem $c=0$.

Așadar $F(\operatorname{tg}x)=F(x)$, $\forall\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. (2) **1p**

Fie $x\in\mathbb{R}$ și $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $x=\operatorname{tg}t$. Considerăm șirul $(t_n)_{n\geq 1}$, cu $t_0=t$ și $t_{n+1}=\operatorname{arctg}t_n$. **1p**

Evident, $t_n\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Din (2) deducem: $F(x)=F(\operatorname{tg}t)=F(\operatorname{tg}t_0)=F(t_0)$, și analog obținem $F(t_1)=F(\operatorname{tg}t_1)=F\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}t_0\right)\right)=F(t_0)$. Inductiv, deducem că $F(t_n)=F(t_0)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ **1p**

Cum $(t_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 0, rezultă că $F(t_0)=F(0)$, deci $F(x)=F(0)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. **1p**

Obținem că $f(x)=0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. **1p**

Subiectul 3. Se consideră o mulțime nevidă *M* și o lege de compoziție asociativă „$\cdot$ ” pe *M*, cu proprietățile:

(i) dacă $a, b \in M$ verifică egalitatea $ab^2 = ba^4$, atunci $a = b$

(ii) oricarea ar fi $a, b, c \in M$, $a^2bc = c^2ba$.

a) Demonstrați că legea de compoziție „$\cdot$ ” este comutativă.

b) Dați un exemplu de mulțime *M* cu 4 elemente înzestrată cu o lege de compoziție cu proprietatea că pentru orice $a \in M$, $a^2 = a$.

Dana Heuberger

Soluție: a) Fie $a \in M$. Pentru $b = a$ și $c = a^2$, din **(ii)** obținem $a^5 = a^6$, $\forall\, a \in M$ **1p**

Așadar $a \cdot \left(a^2\right)^2 = a^2 \cdot a^4$, $\forall\, a \in M$ **1p**

Pentru $b = a^2$, din **(i)** rezultă că $a = a^2$, $\forall\, a \in M$ (1) **1p**

Așadar $a = a^3$, $\forall\, a \in M$. (2) **1p**

Cu $b = a$ în **(ii)**, obținem $ac \overset{(2)}{=} a^3c \overset{(\mathbf{ii})}{=} c^2a^2 \overset{(1)}{=} ca$, $\forall\, a, c \in M$ **1p**

b) $M = \left\{ O_2, I_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, cu înmulțirea uzuală a matricelor , sau orice alt exemplu corect **1p**

Argumentarea faptului că $(M, \cdot)$ are proprietatea din enunț. **1p**

Subiectul 4. Pe mulțimea $M = (0, \infty)$ se dă legea de compoziție asociativă „$*$”, cu proprietatea că pentru orice $x, y, z \in M$, avem $x * y * z = \dfrac{xyz}{xy + yz + zx}$. Arătați că $x * y = \dfrac{xy}{x + y}$, pentru orice $x, y \in M$.

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, Gazeta Matematică

Soluți: Observăm că $x * y * z = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)^{-1}$ **1p**

Avem $3*3*3=1$ **1p**

$(3*3)*3*(3*3) = \left(\dfrac{1}{3*3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3*3}\right)^{-1} = \left(\dfrac{2}{3*3} + \dfrac{1}{3}\right)^{-1}$ (1) **1p**

Dar $(3*3)*3*(3*3) = (3*3)*(3*3*3) = 3*3*1 = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{1}\right)^{-1} = \dfrac{3}{5}$ (2) **1p**

Din (1) și (2) rezultă că $\dfrac{2}{3*3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$, deci $3*3 = \dfrac{3}{2}$. **1p**

$x * y * (3*3) = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{3*3}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ **1p**

Dar $x * y * (3*3) = (x*y)*3*3 = \left(\dfrac{1}{x*y} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right)^{-1}$, deci $x * y = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \dfrac{xy}{x+y}$, $\forall\, x, y \in M$ **1p**

Colegiul Național Vasile Lucaciu

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro