Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

CLASA a XI-a

Subiectul 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât $A^k \neq \lambda \cdot I_2$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$, iar matricea A^k are elementul de pe poziția $(1, 2)$ egal cu zero. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, matricea A^n are elementul de pe poziția $(1, 2)$ egal cu zero.

Subiectul 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Determinați permutările $\sigma \in S_n$ astfel încât pentru orice $k = \overline{2, n-1}$ are loc egalitatea $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sigma(i) \cdot \sigma(\sigma(i))} = \frac{k-1}{2(k+1)}$.

Subiectul 3. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n + 2024) \leq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dați un exemplu de șir care verifică inegalitatea din enunț și nu este monoton.

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Subiectul 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir strict descrescător de numere reale, cu $a_1 = 1$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}.$$

a) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > \frac{1}{2^n}$.

b) Demonstrați că șirul $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\geq 1}$ este nemărginit.

c) Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $\frac{1}{a_n} \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poștal 430282
Telefon și fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro