Colegiul Național „Vasile Lucaciu”

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MARAMUREȘ

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Fie „$*$” o lege de compoziție asociativă și comutativă definită pe o mulțime nevidă *S*, care are proprietatea că, pentru orice $x, y \in S$, există $z \in S$ astfel încât $x * z = y$.
Arătați că dacă $a, b, c \in S$ și $a * c = b * c$, atunci $a = b$.

Subiectul 2. Fie $H \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu cel puțin două elemente, pe care definim legea de compoziție internă „$\circ$” cu proprietatea că $x < x \circ y < y$ pentru orice $x, y \in H$ astfel încât $x < y$.

- **a)** Arătați că „$\circ$” nu admite element neutru și că nu este asociativă.
- **b)** Dați exemplu de o mulțime *H* și o operație „$\circ$”, care să fie comutativă.
- **c)** Dați exemplu de o mulțime *H* și o operație „$\circ$”, care să fie necomutativă.

Subiectul 3. Fie $f, F : (-1,1) \to \mathbb{R}$, unde *F* este o primitivă pe $(-1,1)$ a funcției *f*. Determinați funcția *F* pentru care egalitatea

$$F(x) + \left(x^2+1\right) f(x) = \left(x^2+1\right) e^{arcsinx - arctgx}$$

are loc, oricare ar fi $x \in (-1,1)$.

Subiectul 4.

a) Arătați că inegalitatea $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ are loc pentru orice $x > 0$.

b) Fie $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$. Arătați că F este o funcție bijectivă.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!