**Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”**
**ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024**
**BAREM DE CORECTARE, CLASA A VI-A**

**Subiectul 1.**

**a)** Arătați că $N=\overline{ab1}-\overline{1ab}$ nu poate fi număr prim, unde $a$ și $b$ sunt cifre nenule.

**b)** Determinați cifrele nenule $a$ și $b$ pentru care $N=\overline{ab1}-\overline{1ab}$ este cubul unui număr natural.

(*Gazeta Matematică nr. 4/2024*)

**Soluție:**

**a)** $N=9\cdot(10a+b-11)\,\vdots\,9$, deci $N$ nu poate fi prim. ....................2p

**b)** $N=9\cdot(10a+b-11)$ este cub perfect dacă $10a+b-11=3k^3, k\in\mathbb{N}$. Cum $a$ și $b$ sunt cifre, rezultă $k\in\{0,1,2,3\}$. ....................1p

Dacă $k=0\Rightarrow 10a+b=11\Rightarrow \overline{ab}=11\Rightarrow a=b=1$ și $N=0=0^3$. ....................1p

Dacă $k=1\Rightarrow \overline{ab}-11=3\Rightarrow \overline{ab}=14\Rightarrow a=1,b=4$ și $N=3^3$. ....................1p

Dacă $k=2\Rightarrow \overline{ab}-11=24\Rightarrow \overline{ab}=35\Rightarrow a=3,b=5$ și $N=6^3$. ....................1p

Dacă $k=3\Rightarrow \overline{ab}-11=81\Rightarrow \overline{ab}=92\Rightarrow a=9,b=2$ și $N=9^3$. ....................1p

**Subiectul 2.**

Fie mulțimea $A=\{7,77,777,...,\underbrace{\overline{77...7}}_{2024\,cifre}\}$. Pentru fiecare mulțime $B\subset A$, notăm cu $S(B)$ și $P(B)$ suma, respectiv produsul elementelor mulțimii $B$. Studiați dacă există $X,Y\subset A, X\cup Y=A, X\cap Y=\varnothing$ în fiecare din cazurile:

**a)** $S(X)=S(Y)$;

**b)** $P(X)=P(Y)$.

**Soluție:** Vom arăta că răspunsul este negativ în ambele cazuri:

**a)** $7+77+...+\underbrace{\overline{77...7}}_{2023\,cifre}<10+100+...+\overline{1\underbrace{00...0}_{2023\,cifre}}=\overline{\underbrace{11...1}_{2023\,cifre}0}<\underbrace{\overline{77...7}}_{2024\,cifre}$. Deci, oricum am grupa numerele, suma elementelor care-l conține pe $\underbrace{\overline{77...7}}_{2024\,cifre}$ este mai mare decât suma elementelor celeilalte mulțimi. .......3p

**b)** Presupunem că $P(X)=P(Y)$. Atunci $P(A)=(P(X))^2$, deci $P(A)$ este pătrat perfect. ....................1p

Dar $P(A)=7\cdot 77\cdot...\cdot\underbrace{\overline{77...7}}_{2024\,cifre}=7^{2024}\cdot 1\cdot 11\cdot...\cdot\underbrace{\overline{11...1}}_{2024\,cifre}=M_4+3$, care nu poate fi pătrat perfect. ..........3p

**Subiectul 3.**

Aflați numerele naturale nenule $x$ și $y$, prime între ele, pentru care produsul $xy$ divide suma $2x^2+11y^2$.

**Soluție:** Din $x|xy$ și $xy\left|2x^2+11y^2\right.$ obținem $x\left|2x^2+11y^2\right.$ și cum $x\left|2x^2\right.$, avem $x\left|11y^2\right.$.

Cum $x$ și $y$ sunt prime între ele $\Rightarrow x|11 \Rightarrow x\in\{1,11\}$. ........................................................................3p

**Caz I.** $x=1$. Relația din ipoteză devine $y\left|2+11y^2\right. \Rightarrow y|2 \Rightarrow y\in\{1,2\} \Rightarrow (x,y)\in\{(1,1);(1,2)\}$. ................2p

**Caz II.** $x=11$. Relația din ipoteză devine

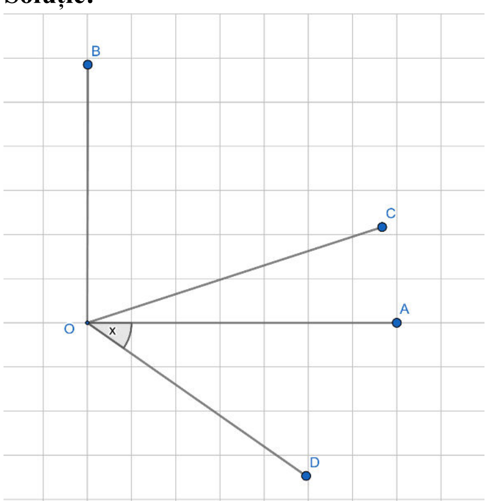
$11y\left|2\cdot 11^2+11y^2\right. \Rightarrow y|22+11y \Rightarrow y|22 \Rightarrow y\in\{1,2,11,22\},(x,y)=1 \Rightarrow (x,y)\in\{(11,1);(11,2)\}$.

În concluzie $(x,y)\in\{(1,1);(1,2);(11,1);(11,2)\}$. ........................................................................2p

**Subiectul 4.**

Unghiurile $\widehat{AOC}$ și $\widehat{BOC}$ sunt adiacente complementare, iar $D$ este în semiplanul determinat de $OC$ și $A$ astfel încât $\widehat{BOC}=2\cdot\widehat{AOD}$ și $4\cdot\widehat{DOC}=3\cdot\widehat{BOC}$. Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{DOC}$.

**Soluție:**

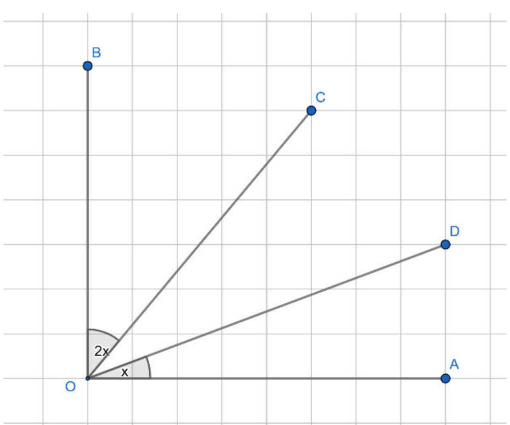



**Cazul I.** $[OA\subset Int\left(\widehat{COD}\right)$. Notăm $\widehat{AOD}=x$. Atunci

$\widehat{BOC}=2x,\widehat{DOC}=\frac{3x}{2}$ și $\widehat{AOC}=\frac{x}{2}$. Cum

$90^\circ=\widehat{BOC}+\widehat{COA}=2x+\frac{x}{2}\Rightarrow x=36^\circ$. Atunci

$\widehat{BOC}=2\cdot 36^\circ=72^\circ,\widehat{AOD}=36^\circ,\ \widehat{DOC}=\frac{3\cdot 36^\circ}{2}=54^\circ$. .....3,5p




**Cazul II.** $[OD\subset Int\left(\widehat{COA}\right)$. Notăm $\widehat{AOD}=x$. Atunci

$\widehat{BOC}=2x,\widehat{DOC}=90^\circ-3x$. Din ipoteză rezultă

$4\cdot\left(90^\circ-3x\right)=2x\Rightarrow 360^\circ-12x=6x\Rightarrow x=20^\circ$. Atunci

$\widehat{BOC}=40^\circ,\widehat{AOD}=20^\circ,\widehat{DOC}=30^\circ$. ..............................3,5p