Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024
BAREM DE CORECTARE, CLASA A VII-A

Subiectul 1.

a) Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive *a* și *b*, are loc egalitatea $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+32}$ este rațional.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$.

Soluție: a) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$ **1p**

b) Folosind eventual punctul **a)**, se deduce că pentru orice numere reale pozitive *a* și *b*, avem $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. $(*)$ **1p**

$\sqrt{n}+\sqrt{n+32}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\sqrt{n},\sqrt{n+32}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow$, $n=k^2$ și $n+32=p^2$, cu $k,p\in\mathbb{N}$ **1p**

$p^2-k^2=32$, deci *p* și *k* au aceeași paritate. Singurele perechi de numere naturale (p,k) care verifică egalitatea precedentă sunt $(6,2)$ și $(9,7)$, pentru care obținem soluțiile $n_1=4$ și $n_2=49$. ....
1p

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3x}+\sqrt{3y}=12$. (1) **1p**

Deoarece $3x,3y\in\mathbb{N}$, egalitatea precedentă are loc dacă și numai dacă $3x$ și $3y$ sunt pătrate perfecte, deci dacă și numai dacă $x=3a^2$ și $y=3b^2$, cu $a,b\in\mathbb{N}$. **1p**

Din (1) obținem $a+b=4$, deci $(a,b)\in\{(0,4);(1,3);(2,2);(3,1);(4,0)\}$.

Rezultă soluțiile $(x,y)\in\{(0,48);(3,27);(12,12);(27,3);(48,0)\}$. **1p**

Observație: Se acordă **1p** și în cazul în care afirmația $(*)$ este enunțată, fără demonstrație.

Subiectul 2. Aflați numărul prim p pentru care suma cifrelor numărului $A=\left(p^2-7\right)^2+33\left(p^2-7\right)+630$ este minimă.

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică 6-7-8/2024

Soluție: Pentru $p=2$, obținem $A=540$, deci $S(A)=9$ **1p**

Pentru $p=3$, obținem $A=700$, deci $S(A)=7$ **1p**

Dacă $p\geq5$, atunci restul împărțirii sale la 6 este 1 sau 5, deci există $k\in\mathbb{N}$, astfel încât $p=6k+1$, sau $p=6k-1$ (în acest caz, $k\neq0$). **1p**

Obținem $p^2-7=(6k\pm1)^2-7=M_6+1-7=6m$, cu $m\in\mathbb{N}^*$. **1p**

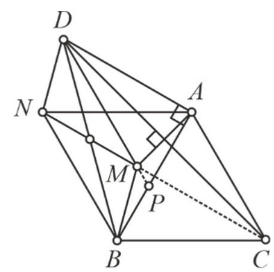
Așadar $A=(6m)^2+33\cdot(6m)+630=36m^2+198m+630=9B$, cu $B\in\mathbb{N}^*$. **1p**

Prin urmare, $S(A)$ este divizibil cu 9, și cum $S(A)\neq0$, rezultă că $S(A)\geq9$. **1p**

Soluția este $p=3$. **1p**

Subiectul 3. Fie triunghiul echilateral ABC, triunghiul dreptunghic isoscel ABD, cu $\widehat{BAD}=90^{\circ}$, astfel încât punctele C și D sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB. Dacă punctul M este simetricul punctului A față de CD, iar punctul N este simetricul punctului M față de mijlocul segmentului BD, demonstrați că:
a) triunghiul ABN este echilateral;
b) punctele C, M și N sunt coliniare.

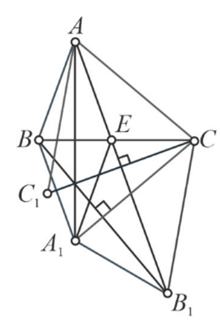
Cristian Heuberger



Soluție: a) CD este mediatoarea segmentului AM, deci $CA=CM$ și $DA=DM$.
Cum $CA=DA$, obținem că $ACMD$ este romb cu toate laturile congruente cu AB. ... **1p**
Evident $\widehat{DAC}=\widehat{DMC}=150^{\circ}$ și $\widehat{ACM}=\widehat{ADM}=30^{\circ}$. **1p**
$BMDN$ este paralelogram (diagonalele se intersectează la mijlocul fiecăreia), deci deducem că $NB=DM=AB$. **1p**
Fie $\{P\}=AB\cap DM$. Din triunghiul dreptunghic ADP rezultă că $\widehat{APD}=60^{\circ}$ și apoi $\widehat{ABN}=\widehat{APD}=60^{\circ}$ (coresp.). Triunghiul ABN este echilateral deoarece este isoscel cu un unghi de 60°. **1p**
b) $BN=AN=AB=AC=BC$, deci $ACBN$ este un romb, prin urmare, CN este diagonală a rombului $ACBN$, deci este bisectoare în triunghiul echilateral ABC, așadar $\sphericalangle ACN=30^{\circ}$. **2p**
Cum și $\widehat{ACM}=\widehat{ADM}=30^{\circ}$ deducem că C, M, N sunt coliniare. **1p**

Subiectul 4. Fie un triunghi ascuțitunghic ABC, cu $\widehat{B}>\widehat{C}$, și punctele A_1, B_1, C_1, E, astfel încât A_1 este simetricul lui A față de dreapta BC, B_1 este simetricul lui B față de dreapta CA_1, C_1 este simetricul lui C față de dreapta AB_1 și $\{E\}=AB_1\cap BC$. Dacă $CC_1\perp A_1B$ și $\widehat{AC_1C}=60^{\circ}$, atunci:
a) demonstrați că ABA_1E este romb.
b) determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Dana Heuberger



Soluție: a) $CC_1\perp AB_1$ și $CC_1\perp BA_1$, deci $AB_1 \parallel BA_1$. **1p**
A_1 este simetricul lui A față de BC, deci triunghiurile ABA_1 și AEA_1 sunt isoscele cu baza AA_1. Cum $\widehat{BA_1A}=\widehat{EAA_1}$ (a.i.), rezultă că $\Delta\, AA_1B\equiv\Delta\, A_1AE$ (U.L.U.). Deducem că $AB=BA_1=A_1E=EA$, adică ABA_1E este romb. **1p**
b) Datorită simetriilor, au loc congruențele: $\Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1BC$ și $\Delta\, A_1BC\equiv\Delta\, A_1B_1C$.
Rezultă că $\widehat{ACB}=\widehat{BCA_1}=\widehat{A_1CB_1}$ și $AB=BA_1=A_1B_1$. **1p**
$AB=A_1E$, deci $\Delta\, A_1B_1E$ este isoscel cu baza B_1E, iar $\widehat{A_1B_1A}=\widehat{A_1EB_1}=\widehat{BAB_1}$. (ultimele două unghiuri sunt corespondente prin raport cu dreptele paralele AB și A_1E și secanta AE) **1p**
Prin urmare, $\widehat{ABA_1}=\widehat{B_1A_1B}$ (suplemente ale unghiurilor congruente BAB_1 și A_1B_1A). **1p**
Din $\Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1BC\equiv\Delta\, A_1B_1C$ deducem că $\widehat{ABA_1}=2\cdot\widehat{ABC}$ și $\widehat{B_1A_1B}=2\cdot\widehat{BA_1C}=2\cdot\widehat{BAC}$, în consecință $\widehat{ABC}=\widehat{BAC}$, deci $\Delta\, ABC$ este isoscel cu baza AB, iar $\Delta\, ACB_1$ este isoscel cu baza AB_1. .... **1p**
$AC=AC_1$ și $\widehat{AC_1C}=60^{\circ}$, deci $\Delta\, ACC_1$ este echilateral, cu înălțimea AB_1. Rezultă că $\widehat{B_1AC}=30^{\circ}$.
Obținem $\widehat{ACB_1}=120^{\circ}$, așadar $\widehat{ACB}=40^{\circ}$. Prin urmare, $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}=70^{\circ}$. **1p**